

Leçon n°2: Système de coordonnées en physique

I. Système de coordonnées cartésiennes:

> Vecteur position $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

> Vecteur déplacement élémentaire:

$$d\vec{OM} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + dz\vec{e}_3$$

> Longueur élémentaire:

$$dl(M) = \|d\vec{OM}\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \Rightarrow L = \sum_{M \in \mathcal{C}} dl(M)$$

> Surface élémentaire:

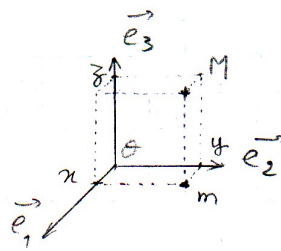
1^{er} type: $dx=0$; $M \in (yoz) \Rightarrow ds = dy dz$

2^{ème} type: $dy=0$; $M \in (xoz) \Rightarrow ds = dx dz$

3^{ème} type: $dz=0$; $M \in (xoy) \Rightarrow ds = dx dy$

> Volume élémentaire:

$$dV = dx dy dz$$



II. Système de coordonnées polaires d'axe $\vec{e}_3$ (oz):

$$M \in (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = (\vec{e}_1, \vec{OM}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\rho, \varphi) \text{ coordonnées polaires de } M$$

> Vecteur position $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho(M)$$

> Vecteur déplacement élémentaire:

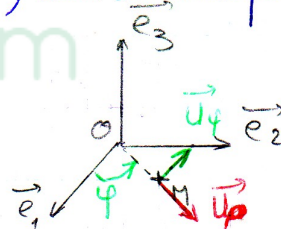
$$d\vec{OM} = d\rho \vec{u}_\rho(M) + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi(M)$$

> Longueur élémentaire:

$$dl(M) = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2}$$

> Surface élémentaire:

$$ds = \rho d\rho d\varphi$$



III. Système de coordonnées cylindriques d'axe (oz) $\vec{e}_3$:

> Vecteur position $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho(M) + z\vec{e}_3$$

> Vecteur déplacement élémentaire:

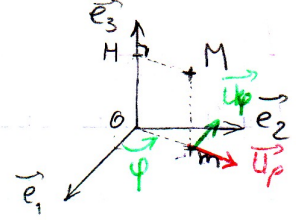
$$d\vec{OM} = d\rho \vec{U}_\rho(M) + \rho d\varphi \vec{U}_\varphi(M) + dz \vec{e}_3$$

> Longueur élémentaire:

$$dl(M) = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2}$$

Rq: Relation entre (x, y, z) et (ρ, φ, z) :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$



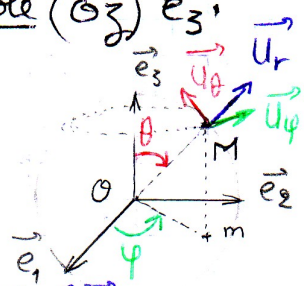
IV. Système de coordonnées sphériques d'axe de pôle (Oz) $\vec{e}_3$:

$$M(r, \theta, \varphi) \text{ tq } \begin{cases} r = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = (\vec{e}_3, \vec{OM}) \in [0, \pi[\\ \varphi = (\vec{e}_1, \vec{Om}) \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

$$\vec{U}_\theta(M) = \frac{\partial \vec{U}_r(M)}{\partial \theta} = \cos \varphi \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \varphi \cos \theta \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_3$$

$$\vec{U}_\varphi(M) = \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2$$

$$\vec{U}_r(M) = \cos \varphi \sin \theta \vec{e}_1 + \sin \varphi \sin \theta \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3$$



> Vecteur position $\vec{OM}$:

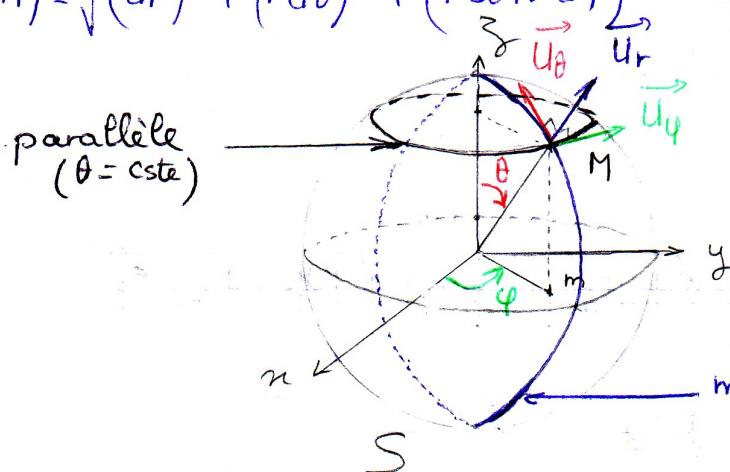
$$\vec{OM} = r \vec{U}_r(M)$$

> Vecteur déplacement élémentaire:

$$d\vec{OM} = dr \vec{U}_r(M) + r d\theta \vec{U}_\theta(M) + r \sin \theta d\varphi \vec{U}_\varphi(M)$$

> Longueur élémentaire:

$$dl(M) = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2}$$



$$\begin{cases} \vec{U}_\theta & \text{tangent au méridien} \\ \vec{U}_\varphi & \text{tangent à la parallèle} \\ \vec{U}_r & \perp S \end{cases}$$

V. Système de coordonnées curviligne.

On pose $S(M) = \widehat{AM}$: abscisse curviligne de M.

> Vecteur position $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = \vec{OM}(S)$$

> Vecteur déplacement élémentaire:

$$d\vec{OM} = ds \vec{T}(M)$$

> Détermination de la base locale: (base de Serret Frenet)

$$\vec{T}(M) = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{d\vec{OM}}{\|d\vec{OM}\|}$$

$$\vec{N}(M) = R_c \frac{d\vec{T}}{ds}$$

$$\vec{B}(M) = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

> Plan osculateur:

C'est le plan passant par M contenant un voisinage de la courbe. Donc $(\vec{T}, \vec{N})$ sont dans le plan osculateur.

Leçon n°3: Cinématique d'un point matériel

1. Trajectoire d'un point matériel M dans $\mathcal{R}$:

La trajectoire est l'ensemble des positions occupées par M au cours du temps. C'est trouver une relation indépendante du temps t entre les composantes du point M.

Remarque: La trajectoire dépend de $\mathcal{R}$.

2. L'hodographe:

C'est la trajectoire de la pointe du vecteur vitesse dans $\mathcal{R}$.

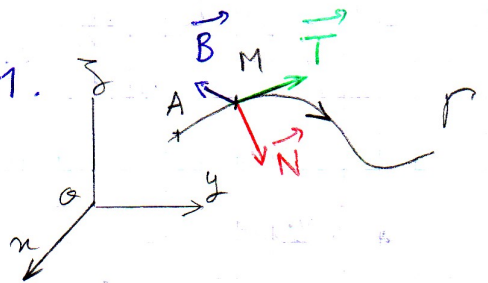
Interprétation physique. L'hodographe nous renseigne sur la variation de l'accélération sans calculer l'accélération $\Rightarrow \vec{v}_{\mathcal{R}}$ est tangent à l'hodo.

3. Expressions de la vitesse et de l'accélération:

> Système de coordonnées cartésienne:

* Vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}}$:

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{y}(t) \vec{u}_y + \dot{z}(t) \vec{u}_z$$



* Accélération $\vec{\gamma}_R$:

$$\vec{\gamma}_R(M) = \ddot{x}(t) \vec{U}_x + \ddot{y}(t) \vec{U}_y + \ddot{z}(t) \vec{U}_z$$

> Système de coordonnées cylindrique d'axe (Oz):

* Vitesse $\vec{v}_R$: composante radiale composante orthoradiale

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\rho} \vec{U}_\rho(M) + \rho \dot{\varphi} \vec{U}_\varphi(M) + \dot{z} \vec{U}_z(M)$$

* Accélération $\vec{\gamma}_R$:

$$\vec{\gamma}_R(M) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{U}_\rho(M) + \left(\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2 \dot{\varphi})}{dt} \right) \vec{U}_\varphi(M) + \ddot{z} \vec{U}_z$$

> Système de coordonnées sphérique:

* Vitesse $\vec{v}_R$:

$$\vec{v}_R(M) = \dot{r} \vec{U}_r(M) + r \dot{\theta} \vec{U}_\theta(M) + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{U}_\varphi(M)$$

* Accélération $\vec{\gamma}_R$:

$$\vec{\gamma}_R(M) = \gamma_r \vec{U}_r(M) + \gamma_\theta \vec{U}_\theta(M) + \gamma_\varphi \vec{U}_\varphi(M)$$

$$\gamma_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\varphi})}{dt}$$

> Système de coordonnées curviligne:

* Vitesse $\vec{v}_R$:

$$\vec{v}_R(M) = \frac{ds}{dt} \vec{T}(M)$$

* Accélération:

$$\vec{\gamma}_R(M) = \frac{dv}{dt} \vec{T}(M) + \frac{v^2}{R_c} \vec{N}(M) \text{ avec } \begin{cases} \gamma_T = \frac{dv}{dt} \text{ composante tangentielle} \\ \gamma_N = \frac{v^2}{R_c} \text{ composante normale} \end{cases}$$

* Détermination de R_c :

$$R_c = \frac{v^2}{\gamma_N} \quad \text{ou} \quad R_c = \frac{v^3}{\|\vec{v}_R \wedge \vec{\gamma}_R(M)\|}$$

4 - Mouvements particuliers:

> M^{ut} rectiligne M se déplace sur une droite

$$\Rightarrow \vec{v}_R \wedge \vec{\gamma}_R = \vec{0} \Rightarrow R_c = \infty \Rightarrow \gamma_N = 0 \Rightarrow \vec{\gamma}_R(M) = \ddot{x} \vec{T}(M)$$

> M^{ut} rectiligne uniforme: $v = \|\vec{v}_R\| = \text{cte}$

$$\Rightarrow x(t) = vt + x_0$$

> M^{ut} rectiligne uniformément varié: $\|\vec{v}_R\| = \text{cte}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \gamma_0 t^2 + \dot{x}_0 t + x_0$$

> Mot circulaire:

M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon R.

* vitesse: $\vec{v}_R(M) = R \dot{\psi} \vec{u}_\varphi(M)$
 $= \dot{\psi} \vec{u}_z \wedge \vec{OM}$

* Vecteur vitesse angulaire: $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{u}_z \Rightarrow \vec{v}_R(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

* Vecteur accélération: $\vec{a}_R(M) = R \ddot{\psi} \vec{u}_\varphi(M) - R(\dot{\psi})^2 \vec{u}_\rho(M)$

Leçon n°4 Composition des mouvements

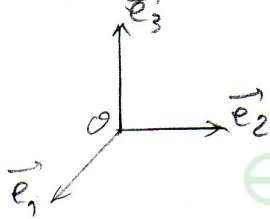
1. Vocabulaire:

- Le m^{ot} de M % R fixe: m^{ot} absolu de M.
- Le m^{ot} de M % R₁ mobile: m^{ot} relatif de M.
- Le m^{ot} de R₁ % R: m^{ot} d'entraînement.

⚠ Le m^{ot} d'entraînement est composé d'une rotation et d'une translation.

> Translation de R₁ % R:

R₁ est obtenu à partir de R par une translation de vecteur $\vec{OO_1}(t)$



> Rotation de R₁ % R:

La rotation de R₁ % R autour de l'axe (Oz) est caractérisée par le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}_{R_1/R} = \dot{\psi}(t) \vec{e}_z(M)$

2. Composition des vitesses:

$$\vec{v}_R(M) = \underbrace{\vec{v}_R(O_1)}_{\text{terme dû à la translation de } R_1 \% R} + \underbrace{\vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \vec{O_1M}}_{\text{terme dû à la rotation de } R_1 \% R} + \vec{v}_{R_1}(M)$$

terme dû à
la translation
de R₁ % R

terme dû à
la rotation
de R₁ % R

> Vitesse d'entraînement de M:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_R(O_1) + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \vec{O_1M}$$

> Vitesse relative de M dans R_1 :

$$\vec{v}_r(M) = \vec{v}_{R_1}(M)$$

> Vitesse absolue de M dans R:

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_R(M)$$

$$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_e(M) + \vec{v}_r(M)$$

3. Composition des accélérations:

$$\vec{\gamma}_R(M) = \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M) + \vec{\gamma}_{R_1}(M)$$

> Vecteur accélération d'entraînement:

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}_R(O_1) + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge (\vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \vec{O_1M}) + \frac{d\vec{\omega}_{R_1/R}}{dt}_{IR} \wedge \vec{O_1M}$$

$= -\omega^2 \vec{HM}$

> Vecteur accélération de Coriolis:

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2 \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \vec{v}_{R_1}(M)$$

> Vecteur accélération relative:

$$\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}_{R_1}(M) = \frac{d\vec{v}_{R_1}(M)}{dt}_{IR_1}$$

> Vecteur accélération absolue:

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_R(M) = \frac{d\vec{v}_R(M)}{dt}_{IR}$$

4. Cas particuliers

> Rotation angulaire uniforme: $\frac{d\vec{\omega}_{R_1/R}}{dt}_{IR} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}_R(O_1) + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge (\vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \vec{O_1M})$$

> $M \in R_1$ et $R_1 \% R$ est une translation: $\vec{\omega}_{R_1/R} = \vec{0}$

$$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_R(O_1) + \vec{v}_{R_1}(M)$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}_R(O_1)$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_R(M) = \vec{\gamma}_R(O_1) + \vec{\gamma}_{R_1}(M)$$

> $M \in R_1$ et $R_1 \% R$ est une rotation: $+O_1 \equiv O$

$$\vec{v}_R(M) = \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \vec{OM} + \vec{v}_{R_1}(M)$$

$$\vec{\gamma}_R(O_1) = \vec{0}$$

Leçon n°5: Dynamique du point matériel dans un référentiel galiléen

I. Définition des causes du m^{lt} d'un objet:

① Forces d'interaction à distance

> Interaction de gravitation:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1^* m_2^*}{r_{12}^2} \cdot \vec{U}_{12}$$

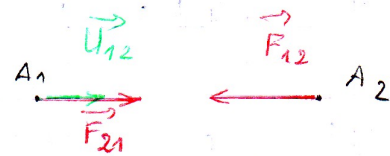
avec $\vec{U}_{12} = \frac{\vec{A_1 A_2}}{\|A_1 A_2\|}$; vecteur unitaire

• $r_{12} = \|A_1 A_2\|$

• G : cst de gravitation

• m_1^* et m_2^* : masses gravitationnelles des objets A_1 et A_2

• $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21}$: Forces d'interactions de gravitation (forces **attractives**).



* Champ de gravitation:

Soit un objet (A_1) de masse gravitationnelle m_1^* . Cet objet crée dans tout l'univers un champ de gravitation $\vec{g}$. Si on place dans ce champ un objet (A_2) de masse m_2^* , alors cet objet est soumis à une force de gravitation

$$\vec{F}_G = m_2^* \vec{g}$$

* Champ de gravitation créé par $A_1(m_1^*)$: $\vec{g} = -G \frac{m_1^*}{r_{12}^2} \vec{U}_{12}$

> Interaction électromagnétique:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

② Forces de contact:

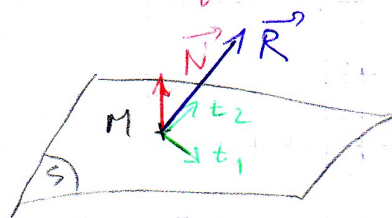
> Réaction d'une surface de contact avec frottement

$$\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_N$$

avec $\vec{R}_t$: réaction tangentielle

$\vec{R}_N$: réaction normale

$$\vec{R}_t \perp \vec{R}_N$$



* Contact avec frottement: $\vec{R}_t \neq \vec{0}$

$$\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_N\| \quad (\text{Loi de Coulomb})$$

avec $f = \tan \varphi$ et φ : angle de frottement.

* Contact sans frottement: $\vec{R}_t = \vec{0}$

$$\vec{R} = \vec{R}_N = R_N \vec{N} \quad (f=0)$$

> Force de frottement visqueux: (m^{ut} de M dans un fluide)

$$\vec{F} = -k \vec{v} \quad (\text{si } \vec{v} \text{ vitesse faible})$$

$$\vec{F} = -k \|\vec{v}\| \vec{v} \quad (\text{si } \vec{v} \text{ vitesse assez grande})$$

> Force de rappel élastique:

$$\vec{T} = -k (l - l_0) \vec{u} \quad (\text{tension du ressort})$$

II - Définition du référentiel galiléen - Loi de la mécanique classique:

① Les référentiels galiléens

> Définition du point isolé: Un système de pts est isolé s'il n'est soumis à aucune interaction à distance.

> Définition du référentiel galiléen: Soit R un référentiel donné et M un pt matériel isolé et en m^{ut} dans R. Si le m^{ut} de M est rectiligne uniforme, on dit que R est un référentiel galiléen.

② Les lois de la mécanique classique (Newtonienne)

> 1^{ère} loi: Principe d'inertie: Il existe dans l'univers des référentiels galiléens (référentiels inertiels)

> 2^{ème} loi: RFD dans un référentiel galiléen:

$$\sum \vec{F}_{\text{appliquées}} = m \vec{\gamma}_R(M)$$

m: masse inertielle

⚠ La relation n'est vraie que dans un référentiel galiléen

$$\vec{p}_R = m \vec{v}_R(M) \Rightarrow \frac{d\vec{p}_R}{dt|_R} = \sum \vec{F}_{\text{app}}$$

⚠ $\frac{\|\vec{F}_i\|}{\|\vec{\gamma}_i(M)\|} = m$: masse inertielle de M.

⚠ $m = m^g$ (masse gravitationnelle = masse inertielle).

> 3^{ème} loi: Principe de l'action et de la réaction:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Leçon n°5 bis Existence de référentiels galiléens

1. Définition et propriétés du référentiel galiléen:

Définition: Référentiel galiléen:

- Soit R un référentiel d'observation.
- Soit M un pt matériel isolé.
- Le pt M est en m^{ot} dans R .

⇒ Alors si le m^{ot} de M est rectiligne uniforme (trajectoire droite et $\vec{v} = \vec{v}_0$) On dit que R est galiléen.

Proposition 1:

- Soit $R(o, x, y, z)$ référentiel galiléen.
- M isolé dans R .
- Soit $R'(o', x', y', z')$ un référentiel en translation uniforme par rapport à R ⇒ R' est galiléen.

Remarque: Le m^{ot} de M est une translation uniforme

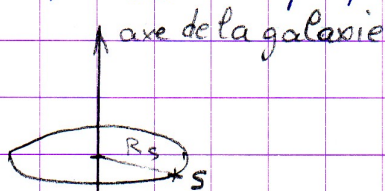
⇒ $\vec{v}_R(M) = \vec{v}_0 = \text{cste}$ en module et direction

Proposition 2: Soit R un référentiel galiléen, Soit $R'(o', x', y', z')$ un référentiel en translation uniforme avec o' décrit un cercle C de rayon a ⇒ R n'est pas galiléen.

2. Le référentiel de Copernic R_C :

Soit $R_C(S, X, Y, Z)$ référentiel:

- d'origine S = centre de masse du système solaire
- 3 axes S_x, S_y, S_z qui pointent vers 3 étoiles fixes.



$R_s = 3 \cdot 10^{20} \text{ m}$ rayon de l'orbite
 $v_s = R_s \omega = 3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$
vitesse du soleil autour de l'axe de la galaxie

On peut considérer le référentiel de Copernic comme référentiel galiléen avec une excellente approximation ($\gamma_N = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2 \approx 0$)

3. Le référentiel géocentrique R_g

Soit $R_g(T, x, y, z)$ référentiel géocentrique lié au centre de la planète Terre avec origine T : centre de masse de la Terre et d'axes (T_x, T_y, T_z) qui sont obtenus par translation des axes de

Copernic: $T_x // S_x; T_y // S_y; T_z // S_z; \vec{\omega}_{R_g/R_c} = \vec{0}$

R_g est en translation % R_c .

$R_{ST} = 1,5 \cdot 10^{10} m$ et $T = \frac{2\pi}{\omega_{TS}} = 365,25 \text{ jours} \Rightarrow \omega_{TS} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$
Le m^{vt} de T % R_c est une rotation $\vec{\omega}_{TS}$ autour de S_z

$\gamma_N(T) = \frac{v^2}{R_{TS}^2} \neq 0$, donc R_g n'est pas galiléen. **Par contre**
si Δt de l'expérience est très inférieure à T , on peut considérer
que la trajectoire de T dans R_g est sensiblement une droite

$\Delta v_{TS} = R_{TS} \omega_{TS} = 30 \text{ km.s}^{-1}$

$\Delta t \ll T \Rightarrow R_g$ est galiléen.

4 - Référentiel Terrestre:

Soit O un pt de la surface de la terre.

* La terre est assimilée à une sphère de centre T et de rayon

$R_T = 6400 \text{ km}$

* Soit $R(O, x, y, z)$ référentiel terrestre d'origine O attachée à la terre.

$$\vec{U}_x = \vec{U}_x(0)$$

$$\vec{U}_y = \vec{U}_y(0)$$

$$\vec{U}_z = \vec{U}_z(0)$$

R_g % R_T est composé

* d'une translation de vecteur $\vec{TO}$

* de deux rotations: a) rotation d'angle φ autour de Tz
de vitesse angulaire $\vec{\omega}_1 = \omega \vec{k}$

b) rotation d'angle θ autour de Ty . Comme θ est fixe,

$\Rightarrow \dot{\theta} = 0$ d'où $\vec{\omega}_{R_T/R_g} = \omega \vec{k}$

* le m^{vt} de O dans R_g est circulaire de rayon $r = R_T \sin \theta$

Le référentiel terrestre n'est pas galiléen. On ne peut alors considérer la RFD dans R_T . **Par contre,**

si Δt de l'expérience est $\ll T = 24 \text{ h}$, dans ce cas:

* O décrit une droite de vitesse cste

* On peut considérer dans ce cas que R_T est galiléen.

Leçon n°6 : Dynamique du point dans un référentiel non galiléen : Application à la dynamique terrestre.

1. Problématique :

Peut-on appliquer la RFD à M dans R' référentiel non galiléen? **Non** car R' n'est pas galiléen.

2. Principe de la RFD dans R' non galiléen:

$$m \vec{\gamma}_{R'}(M) = \sum \vec{F}_{app} + \vec{F}_{ie}(M) + \vec{F}_{ic}(M)$$

$\vec{F}_{ie}(M) = -m \vec{\gamma}_e(M)$: Force d'inertie d'entraînement

$\vec{F}_{ic}(M) = -m \vec{\gamma}_c(M)$: Force d'inertie de Coriolis

$\vec{F}_{ie}(M)$ est appelée aussi force fictive d'entraînement ainsi que $\vec{F}_{ic}(M)$: force fictive de Coriolis.

$$\vec{F}_{ie}(M) = -m \left(\underbrace{\vec{\gamma}_R(O')}_{\text{due à la translation}} + \underbrace{\vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM})}_{\text{due à la rotation}} \right)$$

$\vec{F}_{ie1}(M) = -m \vec{\gamma}_R(O')$: Force d'inertie d'entraînement en translation

$\vec{F}_{ie2}(M) = -m \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM})$: Force d'inertie d'entraînement en rotation

Cas particulier: $\vec{\gamma}_R(O') = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{ie} = m \omega^2 \vec{HM}$
 car $H = \text{proj}_\perp$ de M sur l'axe de rotation.

$$\vec{F}_{ic}(M) = -2m \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{R'}(M)$$

Remarques: 1° Force de frottement dans R' : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}_{R'}(M)$

2° $\vec{F}_{ie1}(M) = -m \vec{\gamma}_R(O')$ est due à la translation non uniforme

3° si M est fixe dans R' (équilibre relatif)

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{app} + \vec{F}_{ie}(M) = \vec{0}$$

3- Introduction à la dynamique terrestre - Définition du poids:

$$\vec{g}(M) = \vec{G}_T(M) + \omega^2 \vec{HM}$$

↑
 champ
 de pesanteur
 terrestre

↑
 champ
 de gravitation
 terrestre

↑
 terme dû à la
 rotation de la terre.

4. Cas où l'objet M est placé sur la surface Terrestre (M=0)
 $\vec{\gamma}_e(0) = \vec{\gamma}_{R_g}(0) = -R_T \omega^2 \sin \theta (\cos \theta \vec{U}_x + \sin \theta \vec{U}_z)$

$$\vec{g}(0) = \vec{G}_T(0) + \omega^2 \vec{\gamma}_e(0)$$

champ de pesanteur →

$\|\omega^2 \vec{\gamma}_e(0)\| \ll \|\vec{G}_T(0)\|$ donc on peut définir

$$\vec{g}(0) \approx \vec{G}_T(0)$$

Pour un pt M au voisinage de la surface, on a

$$\vec{\gamma}_{R_T}(M) = \vec{G}_T(M) - \vec{\gamma}_e(M) = 2m \omega_{R_T/R_g} \wedge \vec{U}_{R_T}^{\rightarrow}(M)$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}_{R_g}(0) + \vec{\omega}_{R_T/R_g} \wedge (\vec{\omega}_{R_T/R_g} \wedge \vec{OM})$$

$$= \vec{\gamma}_{R_g}(0) + \vec{\omega}_{R_T/R_g} \wedge (\vec{\omega}_{R_T/R_g} \wedge (\vec{OO}_T + \vec{O}_T M))$$

$$= \vec{\gamma}_{R_g}(0) - \vec{\gamma}_{R_g}(0) + (-\omega^2 H' \vec{O})$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = -\omega^2 H' \vec{O} \quad \text{avec } H' \text{ Proj}_{\perp} \text{ de } M \text{ sur } (Oz)$$

1. Travail d'une force au sens de la mécanique:

Définition: On appelle δW le travail élémentaire de $\vec{F}$.

$$\delta W = \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM} = \vec{F}(M) \cdot \vec{v}_R(M) \cdot dt$$

Remarque: accroissement $\delta W \neq dW$ ← différentielle totale

⚠ Le travail ^{fini} dépend du référentiel choisi R .

Le point de vue de la mécanique concernant le travail:

- Si $\delta W(\vec{F}) > 0$: travail moteur
- Si $\delta W(\vec{F}) < 0$: travail résistant

2. Expression du travail élémentaire δW dans les différents systèmes de coordonnées:

Système cartésien: $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Système cylindrique: $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = F_\rho d\rho + F_\varphi \rho d\varphi + F_z dz$

Système sphérique: $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = F_r dr + F_\theta r d\theta + F_\varphi r \sin\theta d\varphi$

3. Travail le long d'une courbe:

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_{\gamma_{AB}} \delta W(\vec{F}) \quad (\text{s'exprime en joule})$$

Remarque: * $W(\vec{F})$ dépend du référentiel choisi.

* En général, $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ dépend du chemin γ_{AB} choisi.

* $\vec{F} \perp d\vec{OM} \Rightarrow \delta W(\vec{F}) = 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = 0$

* $\delta W(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \cdot \|d\vec{OM}\| \cdot \cos\theta$

4. Calcul du travail des forces élémentaires:

4-1 - Le poids: $W(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$

dans ce cas: $\delta W(\vec{P}) = dW(\vec{P})$.

4-2 - Force élastique: (Tension d'un ressort)

$$W(\vec{T}) = -\frac{k}{2} (x_B^2 - x_A^2)$$

4-3 - Travail de la force de Coriolis dans R non galiléen:

$$W(\vec{F}_{ic}) = 0.$$

Remarque: Dans R galiléen: $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ic}) \neq 0$

4-4. Travail de la force d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ dans R' :

$$\delta W(\vec{F}_{ie}) = d\left(\frac{m\omega^2 H M^2}{2}\right) \text{ dans } R'$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ie}) = \frac{m\omega^2}{2} (HB^2 - HA^2)$$

5. Puissance d'une force $\vec{F}$:

Définition: $\mathcal{P}_R(t) = \frac{\delta W(\vec{F})}{dt}$ = puissance instantanée de $\vec{F}$.

$$\mathcal{P}_R(t) = \vec{F}(M) \cdot \vec{v}_R(M) \quad (\text{s'exprime en Watt})$$

$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}_R(t) dt$$

6. Théorème de l'énergie cinétique:

6-1. Dans R galiléen: $E_{C/R}(M) = \frac{1}{2} m \vec{v}_R^2(M)$

$$dE_{C/R} = \delta W(\sum \vec{F}_{app})$$

$$E_{C/R}(B) - E_{C/R}(A) = W_{A \rightarrow B}(\sum \vec{F}_{app})$$

6-2. Dans R' non galiléen: $E_{C/R'}(M) = \frac{1}{2} m \vec{v}_{R'}^2(M)$

$$dE_{C/R'} = \delta W(\sum \vec{F}_{app}) + \delta W(\vec{F}_{ie})$$

$$E_{C/R'}(B) - E_{C/R'}(A) = W_{A \rightarrow B}(\sum \vec{F}_{app}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ie})$$

7. Force conservative - Energie potentielle:

Gradient d'une fonction scalaire:

$$\vec{\text{grad}} f(M) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{bmatrix} (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$$

Remarque: Le gradient de f est un vecteur. De plus on a $d\vec{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$ d'où $df(M) = \vec{\text{grad}} f(M) \cdot d\vec{OM}$

7-1. Définition d'une force conservative:

$\vec{F}$ une force conservative $\Leftrightarrow \exists E_p$ fonction scalaire tq $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$

E_p est appelée **énergie potentielle**. On dit que $\vec{F}$ **dérive** d'une énergie potentielle E_p .

7-2. Travail d'une force conservative;

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$$

Remarque: Si γ est une courbe fermée $A \equiv B$ et $\vec{F}$ force conservative
 $\Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = 0$

Comment déterminer E_p ?

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} d\vec{OM}$$

$\Downarrow$
 $= dH$ alors $\vec{F}$ est une force conservative qui dérive

d'une énergie potentielle E_p tq $E_p = -H + \text{cst}$

7-3. Exemples des forces conservatives et d'énergie potentielle E_p :

a) Interaction de gravitation:

$$\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{U}_r(r) \quad ; \quad \delta W(\vec{F}) = \vec{F} d\vec{OM} = d\left(\frac{G m_1 m_2}{r}\right)$$

d'où $\vec{F}$ est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle E_p donné par $E_p = -\frac{G m_1 m_2}{r} + \text{cst}$

b) Le poids $\vec{P}$:

$$\vec{P} = -mg \vec{U}_z \quad ; \quad \delta W(\vec{F}) = d(-mg \cdot z)$$

$\vec{P}$ est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle E_p
tq $E_p = mgz + \text{cst}$

c) Force élastique: Tension $\vec{T}$:

$$\vec{T} = -kx \vec{U}_x \quad ; \quad \delta W(\vec{F}) = d\left(-\frac{kx^2}{2}\right)$$

d'où $\vec{T}$ est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle E_p tq $E_p = \frac{kx^2}{2} + \text{cst}$

$$(\vec{T} = -\text{grad } E_p(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \vec{U}_x)$$

d) Force d'entraînement: car on $\vec{F}_e = m\omega^2 \vec{HM}$.

R fixe et R' en rotation % R .

$$\delta W(\vec{F}_e) = d\left(\frac{m\omega^2}{2} \vec{HM}^2\right)$$

d'où $\vec{F}_e$ est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle $E_p = -\frac{m\omega^2}{2} \vec{HM}^2 + \text{cst}$

8 - Energie mécanique:

8-1- Définition: Théorème de l'énergie mécanique:

$$E_m(B) - E_m(A) = \int_{A \rightarrow B} W(\sum \vec{F}_{nc})$$

$$dE_m = \delta W(\sum \vec{F}_{nc})$$

Remarque: Si M n'est soumis à aucune force non conservative

$\Rightarrow E_m(M) = E_m$ déterminée par les C.I. et indépendante du temps.

$$E_m = E_c(t=0) + E_p(t=0).$$

8-2- Théorème de l' E_m dans un référentiel non galiléen:

$$dE_c = \delta W(\sum \vec{F}_{app}) + \delta W(\vec{F}_{ie}) + \delta W(\vec{F}_{ic})$$

• Si $\vec{F}_{ie}$ est conservative dans R' , $dE_m = \delta W(\sum \vec{F}_{nc})$

• Si $\vec{F}_{ie}$ est non conservative (R' en translation non uniforme)

$$dE_m = \delta W(\sum \vec{F}_{nc}) + \delta W(\vec{F}_{ie}).$$

9 - Etude des équilibres:

9-1- Définition:

Un pt M est en équilibre dans un référentiel $R \Leftrightarrow \vec{v}_R(M) = \vec{0}$.

équilibre relatif:

R fixe, R' mobile % R .

M en équilibre dans $R' \Leftrightarrow \vec{v}_{R'}(M) = \vec{0} \forall t \Rightarrow M$ fixe dans R' .

9-2- Etude de la stabilité des équilibres:

M est en équilibre ds $R \Leftrightarrow \vec{v}_R = \vec{0} \forall t \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\text{grad}} E_p = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\delta E_p}{\delta x} = 0 \\ \frac{\delta E_p}{\delta y} = 0 \\ \frac{\delta E_p}{\delta z} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow E_p$ est un extrémum au pt $M_0 \rightarrow E_p(M_0)$ minimum

$E_p(M_0)$ maximum

Etude du cas où E_p dépend d'une seule variable x :

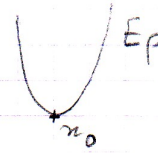
x_0 est un pt d'équilibre $\Leftrightarrow \frac{dE_p(x_0)}{dx} = 0$

$\Rightarrow E_p(x_0)$ est minimum en x_0 .

$\downarrow$ $E_p(x_0)$ est un maximum en x_0 .

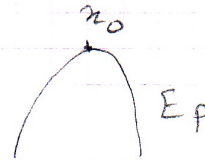
a) E_p minimum en x_0 :

La concavité' de $E_p(x)$ est dirigée
vers le haut: $\frac{d^2 E_p(x)}{dx^2} > 0$
équilibre stable.



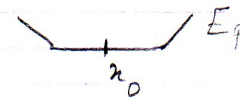
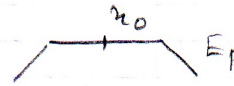
b) E_p maximum en x_0 :

La concavité' de $E_p(x)$ est dirigée
vers le bas: $\frac{d^2 E_p(x)}{dx^2} < 0$
équilibre non stable



c) Cas $\frac{d^2 E_p(x)}{dx^2} = 0$:

$E_p(x)$ est au voisinage
de x_0 : L'équilibre est indifférent
dans les deux cas (équilibre stable)



On a $M = M(x)$

$$E_p(M) = E_p(x)$$

Conditions d'équilibre en $x_0 \Leftrightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0$

• Si $\frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0$: nature de l'équilibre: *équilibre stable*

• Si $\frac{d^2 E_p}{dx^2} < 0$: nature de l'équilibre: *équilibre instable*.

1 - Rappel:

Soit f une fonction scalaire telle que $f(x)$ est quelconque définie sur I . Soit $x_0 \in I$. si je connais $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ (n fini), on peut connaître $f(x)$ au voisinage de x_0 par le développement limité:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

→ Développement limité de f au voisinage de x_0 à l'ordre n .

cas particulier: $x \rightarrow 0$

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

2 - Mvt d'un pt matériel au voisinage d'une position d'équilibre stable x_0 :

Soit M se déplace sur Ox et M soumis uniquement à des forces conservatives. si $\ddot{x}(t) \neq 0$, et $k = \frac{d^2 E_P(0)}{dx^2} > 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{équation d'un oscillateur harmonique libre non amorti.}$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$: pulsation propre de l'oscillateur harmonique libre non amorti.

Remarque : Cette équation est établie indépendamment de la nature physique de la variable $x(t)$.

• L'approche énergétique ou l'approche par RFD aboutissent à cette équation.

3 - Résolution de $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{mvt oscillatoire de période } T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ω_0 = pulsation propre de l'oscillateur

x_m = amplitude $x_m > 0$

$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi$: phase du mvt

φ = phase à l'origine du temps.

Détermination de x_m :

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

* Détermination de φ :

$$\varphi = \arctg\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)$$

4. Calcul Energétique:

$$E_m = \frac{1}{2} k x_m^2 \quad (\text{système conservatif})$$

Moyenne temporelle d'une fonction périodique:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad T: \text{période de } f.$$

Moyenne temporelle de E_c au cours de la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$\langle E_c \rangle = \frac{k x_m^2}{4}$$

Moyenne temporelle de E_p au cours de la période T_0 :

$$\langle E_p \rangle = \frac{k x_m^2}{4}$$

Leçon n°9 Oscillateur harmonique libre amorti

On suppose que M est soumis à des forces conservatives + forces de frottement visqueux $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ ($\lambda > 0$).

1. Equation du m^{vt} de M par approche énergétique

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

• $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$: pulsation propre de l'oscillateur libre non amorti

• $2\alpha = \frac{\lambda}{m}$: facteur d'amortissement.

• $\tau = \frac{1}{2\alpha}$: le temps de relaxation.

• $Q = \tau \omega_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha}$: facteur de qualité.

* Equation du m^{vt} d'un oscillateur libre amorti:

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

2. Détermination des solutions de $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$:

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2) \rightarrow \Delta > 0: \text{régime apériodique.}$$

$$\rightarrow \Delta = 0: \text{régime critique}$$

$$\rightarrow \Delta < 0: \text{régime pseudo-périodique}$$

a) Régime apériodique: $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha > \omega_0$

$$x(t) = e^{\alpha t} (A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}) \quad \text{avec } \omega^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$$

b) Régime critique : $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \omega_0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$:

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\alpha t}$$

c) Régime pseudopériodique : $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha < \omega_0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$:

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}} : \text{ pseudopériode de la fonction } x(t).$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \Rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$$

Remarque :

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\alpha T} \quad \text{indépendante du temps } t.$$

Décroissement logarithmique : $\delta = \alpha T$

3. Etude du cas de l'amortissement faible :

$$\alpha \ll \omega_0 \text{ ou } \delta \ll 1 \text{ ou } Q \gg 1$$

$$\delta = \text{Log} \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right) = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{\pi}{Q \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \left(\frac{\omega_0}{4\alpha}\right)^2}}$$

Pour faible amortissement $\alpha \ll \omega_0$ à l'ordre 0

$$T \simeq T_0 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{Q}$$

Leçon n°10

Oscillateur harmonique forcé

1. Equation du m^{vt} par approche énergétique :

M se déplace sur (O, x) :

$$m \ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_{ex}(t)}{m} \quad \text{équation d'un oscillateur harmonique forcé.}$$

2. Résolution de l'équation :

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{ex}(t)}{m} \quad \left(= \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x \right)$$

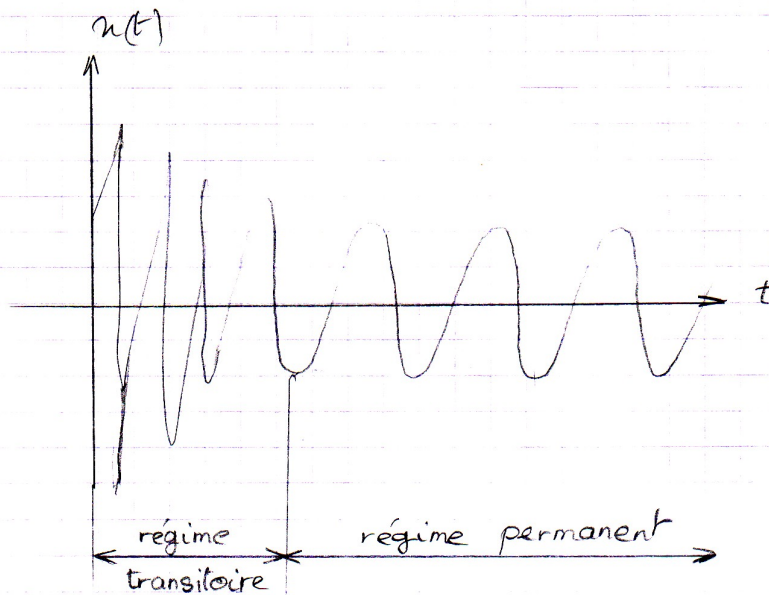
La solution générale est donnée par $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

• $x_1(t)$: solution générale de $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (leçon 9)

• $x_2(t)$: solution particulière

or $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0$ c à d $t \gg t_0$ alors $x(t) = x_2(t)$ pour $t > t_0$

On étudie alors le m^{e} de M quand t est très grand $\Rightarrow$ régime établi, régime permanent.



$\vec{F}_{ex}(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi) \vec{U}_x$: force excitatrice non conservative
 ω : pulsation de l'excitateur
 φ : phase à $t = 0$

2-1- Méthode complexe :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \in \mathbb{R}.$$

notation complexe :
$$\begin{cases} \underline{x}(t) = \underline{x}_m e^{j\omega t} \\ \underline{x}_m = e^{j\varphi} \end{cases}$$
 amplitude complexe

on a donc
$$\begin{cases} x_m = |\underline{x}_m| \\ \varphi = \arg(\underline{x}_m) \end{cases}$$
 avec $\tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{x}_m)}{\text{Re}(\underline{x}_m)}$

a) Opérateur de dérivation :

$$\frac{d}{dt}(\underline{x}(t)) = j\omega \underline{x}(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\underline{x}(t)) = -\omega^2 \underline{x}(t)$$

b) Opérateur d'intégrale :

$$\int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}(t)$$

Remarque : La dépendance temporelle est de la forme $e^{j\omega t}$

2-2- Résolution de $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \varphi)$

$$\underline{x}_m = \frac{\underline{F}_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega)}$$

* Détermination de x_m :

$$x_m = |\underline{x}_m| = \frac{F_m}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

* Détermination de la phase φ :

$$\varphi = \arg(\underline{x}_m) = \arg\left(\frac{\underline{F}_m}{m}\right) - \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega)$$

$$\text{or } \varphi = \arg\left(\frac{\underline{F}_m}{m}\right)$$

$$\text{on pose } \theta = -\arg(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega)$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{-2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{Q(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}$$

$$\text{On a alors } \theta_z = \varphi_z - \varphi_{ex}$$

↑
déphasage de la réponse en élongation $x(t)$ par rapport à l'excitation $F_{ex}(t)$.

* Cas particulier: $\varphi = 0$:

$$\theta = \varphi \Rightarrow \tan \varphi = \frac{-2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Remarque: $\tan \varphi = \tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi}$

si $\varphi = 0$ alors $\tan \varphi = \tan \theta$ d'où $x(t)$ est complètement déterminé.

3- Etude de l'amplitude $x_m(\omega)$: $\omega \in [0, +\infty[$

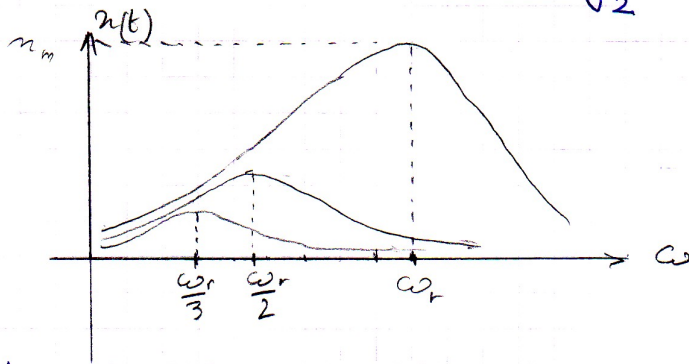
$$\frac{dx_m(\omega)}{d\omega} = \frac{2\omega F_m (\omega_0^2 - \omega^2 - 2\alpha^2)}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2)}$$

$$\frac{dx_m(\omega)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \text{ou } \omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2 \end{cases}$$

* Discussion: ($\omega \neq 0$)

$$a) \omega_0^2 - 2\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

$x_m(\omega)$ passe par un maximum pour
 $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$ ($\alpha < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \alpha_c$)

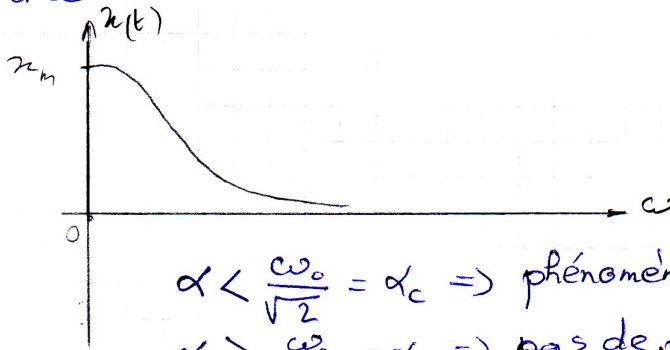


quand $\alpha \rightarrow 0$ on a $\omega_r \rightarrow \omega_0$ d'où $x_m(\omega) \rightarrow +\infty$

L'amplitude est très grande, on dit que ω_r est la **pulsation de résonance**.

b/ $\omega_0^2 - \alpha^2 < 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \alpha_c$

par suite $\frac{d x_m(\omega)}{d \omega} < 0$ $x_m(\omega)$ passe par un maximum

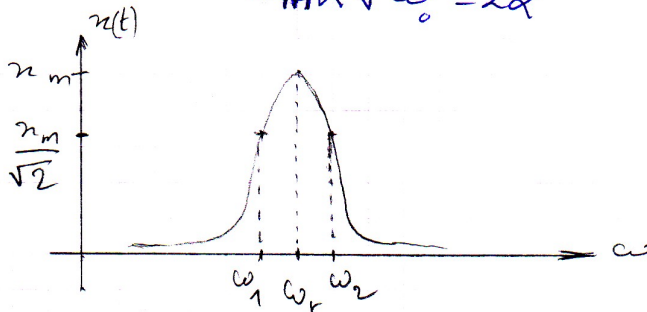


$\alpha < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \alpha_c \Rightarrow$ phénomène de résonance

$\alpha > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \alpha_c \Rightarrow$ pas de phénomène de résonance.

* Etude de $x_m(\omega)$ dans le cas de faible amortissement ($\alpha \rightarrow 0$)

$$x_{max} = x_m(\omega_r) = \frac{F_m}{2m\alpha\sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}}$$



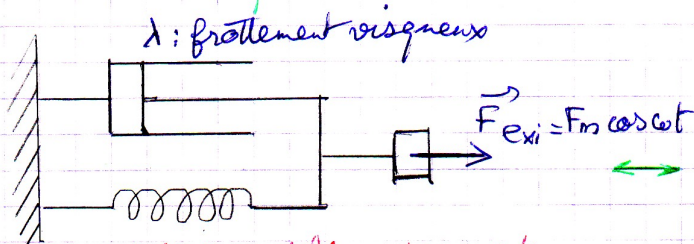
On définit $[\omega_1, \omega_2]$ bande passante par $x_m(\omega) > \frac{x_m}{\sqrt{2}}$
 pour $\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$

avec ω_1 et ω_2 tq $\omega_1 = \omega_0 - \alpha$
 $\omega_2 = \omega_0 + \alpha$

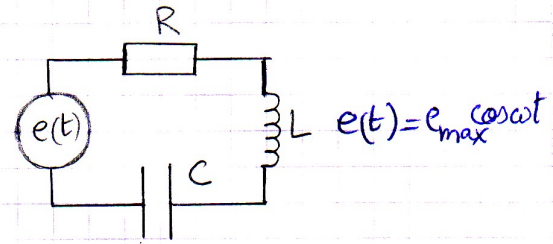
On pose $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\alpha$ d'où $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

4. Analogie Electro-Mécanique : Oscillateur harmonique

En mécanique



En électricité



Equation différentielle du m.e.t.:

$$m \ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = F_{ext}(t) \longleftrightarrow L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = e(t)$$

m : masse

$\longleftrightarrow L$: inductance

λ : frottement visqueux

$\longleftrightarrow R$: résistance

k : raideur

$\longleftrightarrow \frac{1}{C}$: inverse de la capacité

x : elongation

$\longleftrightarrow q$: charge électrique

$v = \dot{x}$: vitesse

$\longleftrightarrow i = \dot{q}$: intensité

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$: pulsation propre

$\longleftrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} = \frac{m}{\lambda}$$

$$\longleftrightarrow \zeta = \frac{L}{R}$$

$$Q = \zeta \omega_0 = \frac{m}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\longleftrightarrow Q = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\longleftrightarrow E_{magnétique} = \frac{1}{2} L i^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\longleftrightarrow E_{électrique} = \frac{1}{2C} q^2$$

I. Définition:

- On appelle choc de particules la brusque modification des vitesses qui provient d'une interaction intense pendant un temps très bref.

II. Conservation de la quantité de mouvement pendant le choc:

Soit $[t_0, t_0 + \epsilon]$ intervalle du choc et ϵ : durée du choc tq $\epsilon \rightarrow 0$.

On a $\vec{p}_1$: quantité de m^{vt} d'une particule M_1 ,

$\vec{p}_2$: quantité de m^{vt} d'une particule M_2 .

- La quantité de m^{vt} du système $\{M_1 + M_2\}$ se conserve pendant le choc entre M_1 et M_2 . En effet: $\vec{p}_1(t_0) + \vec{p}_2(t_0) = \vec{p}_1(t_0 + \epsilon) + \vec{p}_2(t_0 + \epsilon)$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

III Conservation de l'énergie cinétique:

Soient E_c : énergie cinétique avant le choc

E_c' : énergie cinétique après le choc

- W_{choc} : travail total de toutes les forces appliquées pendant le choc.

$$E_c = E_c' - W_{choc}$$

① Choc élastique: $W_{choc} = 0$:

- * Définition: Un choc est dit élastique s'il y a conservation de l'énergie cinétique.

* Remarque: Le choc est élastique si le nombre et la nature des particules sont les mêmes avant et après le choc.

$$E_c = E_c'$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

② Choc inélastique / meu: $W_{choc} \neq 0$

- * Définition: Un choc est dit inélastique si l'énergie cinétique n'est pas conservée.

Remarques: R_1 / Un choc est inélastique si le nombre et/ou la nature des particules n'est pas la même avant et après le choc.

R_2 / L'énergie perdue pendant le choc a modifié le système mécanique en le déformant ou en le brisant.

$$E_c = E'_c + \Delta E_c$$

E_c avant choc $\nearrow$
 E_c après choc $\nwarrow$ variation de l' E_c après le choc

On définit alors le coefficient de restitution de l'énergie

$$e = \frac{E'_c}{E_c} \quad \text{avec } 0 \leq e \leq 1$$

Si $e = 1 \Rightarrow$ choc élastique

Si $e = 0 \Rightarrow$ disparition totale de l'énergie cinétique disponible avant le choc

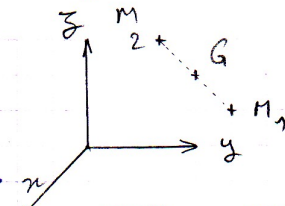
IV. Choc dans un référentiel barycentrique:

Soit le système mécanique $(S) = \{M_1 + M_2\}$ deux particules.

G : centre de gravité'

ou centre de masse

ou barycentre du système mécanique.



$$G \text{ barycentre de } \{M_1, M_2\} \Leftrightarrow m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

Comme O est fixe dans $R(O, x, y, z)$,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_R(G) = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$$

① Définition du référentiel barycentrique:

C'est le référentiel R^* obtenu par translation de vecteur $\overrightarrow{OG}$ du référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$

② Proposition

Si le système (S) est isolé, alors R^* est galiléen.

③ Choc élastique dans R^* :

$\vec{p}_1^*$: quantité de m^{vt} de M_1 dans R^* juste avant le choc

$\vec{p}_2^*$: quantité de m^{vt} de M_2 dans R^* juste avant le choc

$\vec{p}_1^*$: quantité de m^{vt} de M_1 juste après le choc

$\vec{p}_2^*$: quantité de m^{vt} de M_2 juste après le choc

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{p}_1^{*'} + \vec{p}_2^{*'} = \vec{0}$$

$$\|\vec{p}_1^*\| = \|\vec{p}_2^*\| = \|\vec{p}_1^{*'}\| = \|\vec{p}_2^{*'}\|$$

④ Conservation de l' E_C dans R^*

$$E_C^* = E_C^{*'}$$

Leçon 12: Théorèmes fondamentaux de la dynamique d'un point matériel

I. Théorème de la quantité de m^{vt} dans R galiléen: $\sum \vec{F}_{app} = \frac{d\vec{p}(M)}{dt}|_R$

Si un point M est isolé ($\sum \vec{F}_{app} = \vec{0}$) alors

$$\frac{d\vec{p}_R(M)}{dt}|_R = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_R(M) = \vec{c}st$$

$\Rightarrow$ La quantité de mouvement dans un référentiel galiléen se conserve au cours du temps.

II. Théorème du moment cinétique:

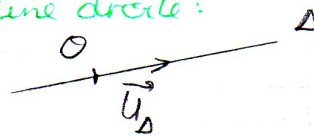
① Définition: $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p}_R(M) = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_R(M)$

Remarque: $\vec{L}_O(M)$ est noté aussi $\vec{G}_O(M)$

$\vec{L}_O(M)$ caractérise la rotation du pt M % O (point fixe).

② Définition: Moment cinétique % à une droite:

$$L_\Delta(M) = \vec{L}_O(M) \cdot \vec{u}_\Delta$$
$$= (\vec{OM} \wedge m \vec{v}_R(M)) \cdot \vec{u}_\Delta$$



C'est la projection de $\vec{L}_O$ sur Δ .

③ Théorème du moment cinétique:

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt}|_R = \vec{OM} \wedge \sum \vec{F}_{app}$$

Remarque:

$$\frac{dL_\Delta(M)}{dt}|_R = (\vec{OM} \wedge \sum \vec{F}_{app}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

④ Propriétés du moment cinétique:

* Définition: force centrale;

On dit que $\vec{F}(M)$ est une force centrale de centre O ssi $\vec{F}(M) // \vec{OM} \quad \forall M$.

Exemples: Force de gravitation exercée par le soleil sur la terre: $\vec{F}_G(M) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{U}_r(M)$

* Proposition 1:

M soumis à une force centrale $\vec{F}$ de centre O alors

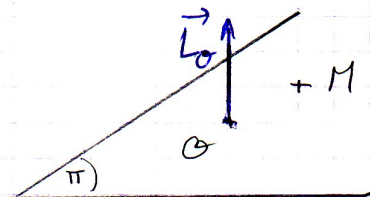
$$\vec{L}_O(M) = \text{cste notée } \vec{L}_O \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ Le moment cinétique se conserve au cours du mvt.

* Proposition 2:

M soumis à une force centrale $\vec{F}$ de centre O alors la trajectoire de M est

située dans un plan Π passant par O et $\perp \vec{L}_O$ (le mvt de M est un mvt plan).



⑤ Application du moment cinétique:

a) Loi des aires ou vitesse aléatoire:

M soumis à une force centrale $\vec{F}$ de centre O alors

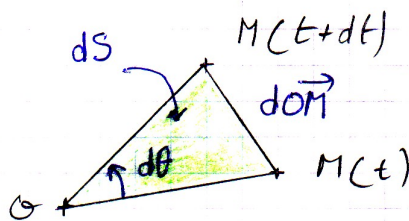
$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L_O}{2m} = \frac{C}{2}$$

avec $r = \|\vec{OM}\|$

$C = \frac{L_O}{m}$: constante des aires

dS = surface balayée par le vecteur $\vec{OM}$ entre t et $t+dt$

$\frac{dS}{dt}$ = vitesse aléatoire

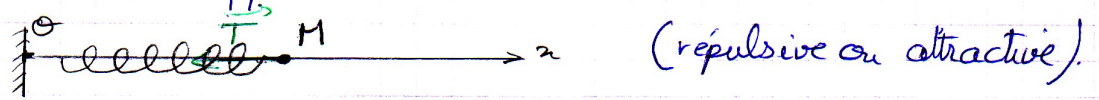


Leçon 13: Mouvement à force centrale

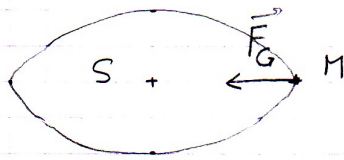
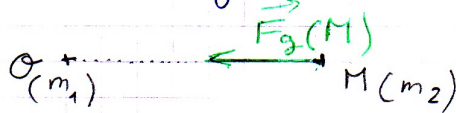
I - Généralités sur le m^{st} à force centrale:

① Définition: On dit que le m^{st} de M est soumis à une force centrale $\vec{F}(M)$ si $\vec{F}$ et $\vec{OM}$ sont colinéaires,

Exemples: • Force de rappel d'un ressort



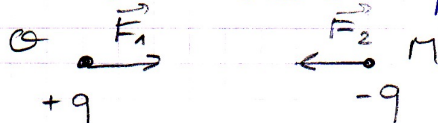
• Force de gravitation: $\vec{F}_g(M) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{U}_r(M) = -\frac{k}{r^2} \vec{U}_r$



$$\vec{F}_G(M) = -\frac{k}{r^2} \vec{U}_r(M)$$

avec $\vec{U}_r(M) = \frac{\vec{SM}}{\|\vec{SM}\|}$ et $r = \|\vec{SM}\|$

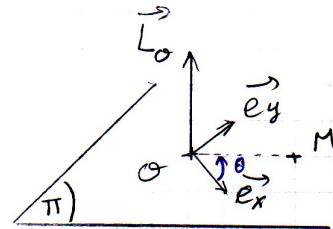
• Force électrostatique: $\vec{F}(M) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{U}_r(M)$



② Propriétés fondamentales d'un m^{st} à force centrale:

Proposition 1: $\vec{L}_O(M) = \vec{L}_O \quad \forall t$

Proposition 2: Le m^{st} de M est situé dans le plan Π passant par O et $\perp \vec{L}_O$



Proposition 3: Loi des aires:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L_O}{2m}$$

$$S(t) = \frac{C}{2} t + S_0 \quad (S_0 = S(t=0))$$

③ Formules de Binet:

1^{ère} formule de Binet:

$$v^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (u = \frac{1}{r})$$

2^{ème} formule de Binet:

$$\vec{\gamma}_N(M) = -C u^2 (u'' + u) \vec{U}_r(M) \quad (u'' = \frac{d^2 u}{d\theta^2})$$

II Équation de la trajectoire:

① Etablissement de l'équation polaire de la trajectoire:

$$\vec{F}(M) = -\frac{k}{r^2} \vec{U}_r(M) \quad \text{avec } k > 0 \text{ et } r = \|\vec{OM}\| \text{ et } \vec{U}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

Remarque: $\vec{F}$ est une force conservative, Elle dérive

d'une énergie potentielle $E_p(r) = -\frac{k}{r}$

$$U'' + U = \frac{k}{mC^2} = \frac{1}{p}$$

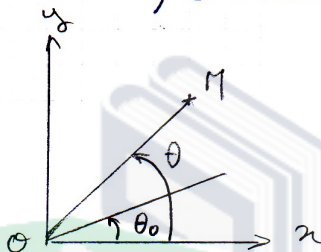
$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

équation polaire d'un conique

avec $p = \frac{mC^2}{k}$: paramètre du m^{ot}

$e = Ap = A \frac{mC^2}{k}$: excentricité.

dont l'un des foyers est O (centre de $\vec{F}$) et d'axe focal faisant un angle θ_0 avec (Ox) .



② Nature de la trajectoire de M en fonction de e:

On pose $\theta_0 = 0$.

$$(1 - e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2 \quad \text{équation cartésienne du } m^{ot}$$

Discussion:

a) Cas 1: $e = 0$

$x^2 + y^2 = p^2$ C'est l'équation d'un cercle de centre

O (centre de la force centrale) et de rayon $r = |p|$

b) Cas 2: $0 < e < 1$

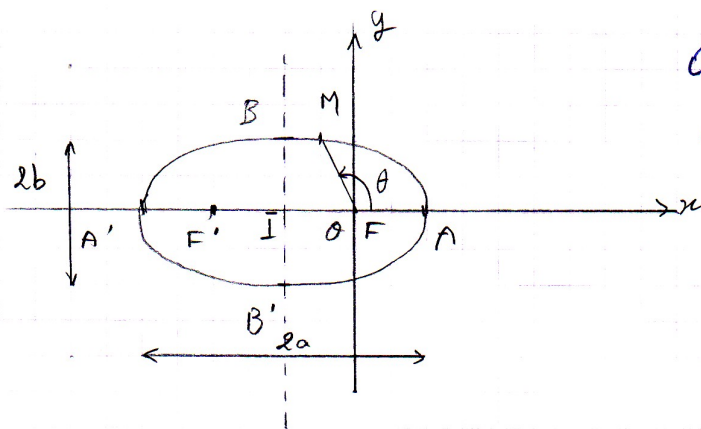
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{avec } \begin{cases} a = \frac{p}{1 - e^2} \\ b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \\ x_0 = \frac{-pe}{1 - e^2} \end{cases}$$

C'est l'équation d'une ellipse de centre

$I(x_0 = \frac{-pe}{1 - e^2}, y_0 = 0)$ et de demi-grand axe

a et de demi-petit axe b et dont l'un des foyers est O (centre de la force centrale).



$$0 < e < 1$$

$$a > b$$

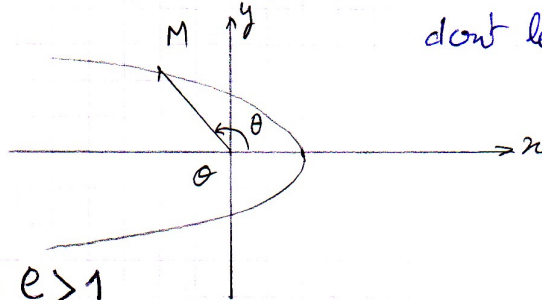
$F = O$ et F' 2 foyers

$$F' = S_1(F)$$

e) cas 3: $e = 1$

$$y^2 = p^2 - 2px$$

C'est l'équation d'une parabole d'axe (Ox) dont le foyer F est O .

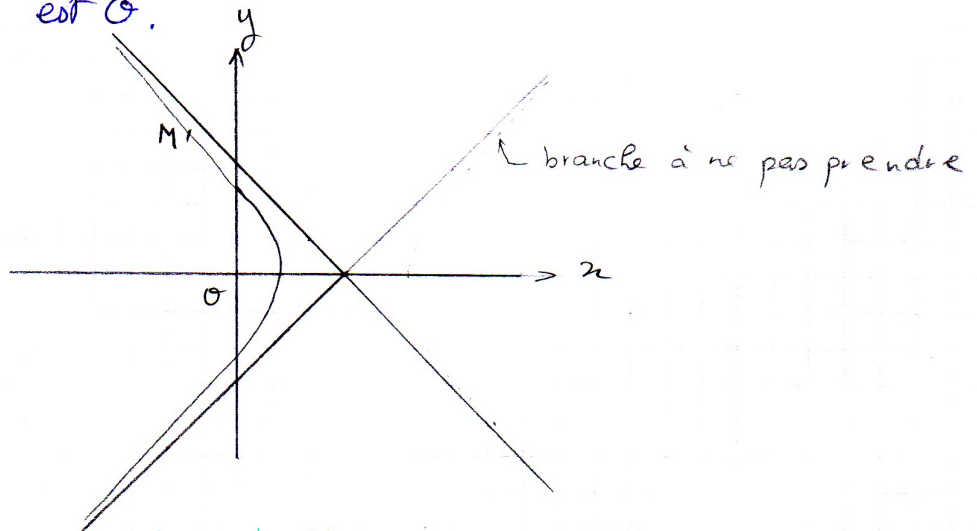


d) cas 4: $e > 1$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{avec } \begin{cases} a = \frac{p}{1 - e^2} \\ b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} \end{cases}$$

C'est l'équation d'une hyperbole dont l'un des foyers est O .



③ Relation entre l'excentricité e et l'énergie mécanique E_m :

$$E_m = \frac{K}{2p} (e^2 - 1)$$

$$e = 1 + \frac{2p E_m}{K}$$

interprétation énergétique de l'excentricité e

Commentaires:

c_1 / L'énergie mécanique E_m ne dépend que de l'excentricité e de la conique).

c₂ / Trajectoires :

Cercle : $e=0 \Leftrightarrow E_m = -\frac{k}{2p} < 0$

Ellipse : $0 < e < 1 \Leftrightarrow E_m = \frac{k}{2p} (e^2 - 1) < 0$

Parabole : $e=1 \Leftrightarrow E_m = 0$

Hyperbole : $e > 1 \Leftrightarrow E_m = \frac{k}{2p} (e^2 - 1) > 0$

courbes fermées

courbes ouvertes

④ Etude de la trajectoire elliptique : Les lois de Kepler :

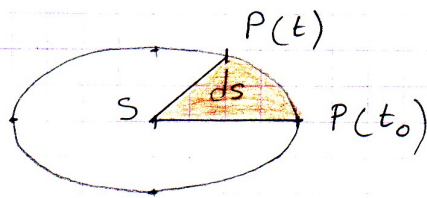
a) 1^{ère} loi de Kepler :

Dans R_c galiléen, les centres des planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le soleil

b) 2^{ème} loi de Kepler :

Dans R_c galiléen, le m^{vt} des planètes se fait suivant la loi des aires : L'aire décrite par le rayon vecteur soleil planète ($\vec{SP}$) est proportionnel au temps t

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{L_s}{2m}$$



$$\begin{cases} S = \text{surface de l'ellipse} \\ C = r^2 \dot{\theta} \end{cases}$$

c) 3^{ème} loi de Kepler :

Dans R_c galiléen, les rapports des carrés de la période T de révolution sur le cube des demi-grands axes a sont indépendants de la planète :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \text{ indépendante de la planète.}$$

⑤ M^{vt} des satellites artificiels autour de la terre :

a) Vitesse de satellisation dans R_g (vitesse cosmique) :

Définition :

On appelle vitesse géocentrique de satellisation d'un satellite artificiel la vitesse géocentrique $\vec{V}_s$ pour laquelle son mouvement est circulaire à une distance $R_c = R_T + z$ du centre de la terre

$$v_s = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + z}}$$

vitesse de satellisation
(orbite circulaire).

Commentaire: $z \ll R_T$; $R_c \approx R_T$: orbite circulaire rasante

$$v_s = v_c = \sqrt{g R_T} \leftarrow \text{première vitesse cosmique}$$

Remarque: Masse d'une planète par le m d'un satellite:

$$M_T = \frac{R_c \omega^2}{G}$$

b) Vitesse de libération dans R_g :

Définition: On appelle vitesse géocentrique de libération v_e la vitesse minimale pour laquelle tout objet initialement à la surface de la terre puisse échapper de l'attraction de gravitation terrestre.

$$v_e = \sqrt{2g R_T} \Leftrightarrow v_e = \sqrt{2} v_c \text{ deuxième vitesse cosmique}$$

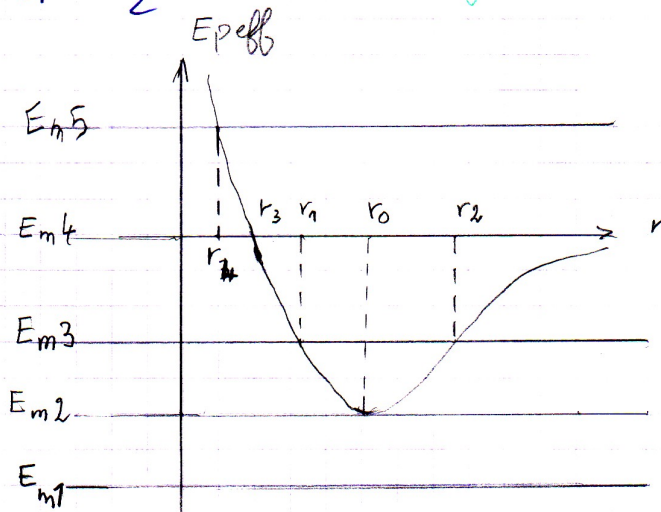
⑥ Approche énergétique:

a) Cas d'une force centrale attractive: $\vec{F}(M) = -\frac{k}{r^2} \vec{U}_r(M)$ ($k > 0$)

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = E_{cr} + E_{peff}$$

$$E_{peff} = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} : \text{énergie potentielle effective}$$

$$E_{cr} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 : \text{énergie cinétique radiale}$$



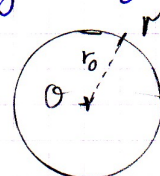
$$r_0 \text{ vérifie } \frac{dE_{peff}}{dr} = 0$$

Discussion:

Cas 1: $E_{m1} < E_{peff}(r_0) < E_{peff}(r) \forall r$
 $\Rightarrow$ m vt impossible

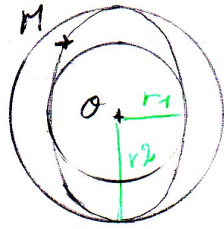
Cas 2: $E_{m2} = E_{peff}(r_0)$

Le pt M décrit un cercle de centre O (centre de la force centrale) et de rayon r_0



Cas 3: $E_{\text{eff}}(r) < E_{m3} < 0$

- Pour $r \in]0, r_1[\cup]r_2, +\infty[\Rightarrow E_{m3} < E_{\text{eff}} \Rightarrow m^{\text{ot}}$ impossible
- Pour $r \in [r_1, r_2] \Rightarrow E_{m3} > E_{\text{eff}} \Rightarrow m^{\text{ot}}$ possible



État lié

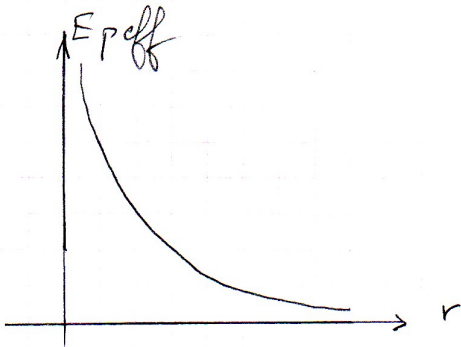
Cas 4 $E_{m4} = 0$

- Pour $r \in]0, r_3[\Rightarrow E_m < E_{\text{eff}}(r) \Rightarrow m^{\text{ot}}$ impossible
 - Pour $r \geq r_3 \Rightarrow$ le pt M s'approche de O jusqu'à $r = r_3$ puis $r \rightarrow \infty$
- État de diffusion

b) Approche énergétique: cas répulsif: $\vec{F}(M) = \frac{-k}{r^2} \vec{u}_r$ ($k < 0$)

$$p = \frac{-m c^2}{k} > 0$$

$$r = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) - 1} \Rightarrow \text{trajectoire} \begin{cases} \nearrow \text{parabole} \\ \searrow \text{hyperbole} \end{cases}$$



$$E_{\text{eff}} = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} > 0$$

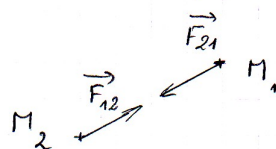
Leçon n°14 . Problème de deux corps: Application des forces centrales

I. Référentiel barycentrique:

① Définition: Centre d'inertie du système $\{M_1, M_2\}$.

C'est le barycentre des points M_1 et M_2 .

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2}$$



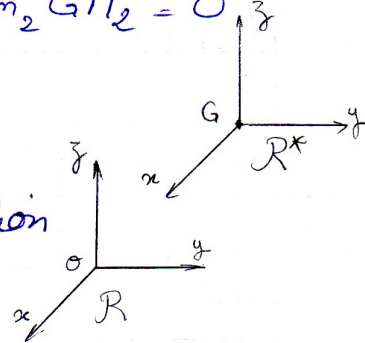
② Propriétés:

G centre de masse de $\{M_1, M_2\} \Leftrightarrow m_1 \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM}_2 = \vec{0}$

Proposition: $\vec{U}_R(G) = \vec{cste}$

③ Définition: Référentiel barycentrique:

$\mathcal{R}^*(G, x, y, z)$ réf. de centre G obtenu par translation de $\mathcal{R}$.



④ Propriétés:

$\mathcal{R}^*$ est un référentiel galiléen.

II. M^{st} relatif de M_2 % M_1 :

$\vec{r} = \vec{M_1 M_2}$: vecteur position de M_1 % M_2

μ : masse réduite telle que $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \Big|_R = \vec{F}_{12}$$

Proposition:

$$\vec{OM}_1 = \vec{OG} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{OM}_2 = \vec{OG} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

III. Etude du m^{st} de $\vec{r}(t)$ dans $\mathcal{R}^*$: $\vec{GM} = \vec{r}(t)$

$$\mu \frac{d^2 \vec{GM}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{12}$$

Trajectoire de M_1 et M_2 dans $\mathcal{R}^*$:

$$\begin{cases} \vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{GM} \\ \vec{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{GM} \end{cases}$$

II. Problème de force centrale:

① $\vec{F}_{12}$ est une force centrale de centre G:

Dans $\mathcal{R}^*$, $\vec{F}_{12}$ passe constamment par G, d'où $\vec{F}_{12}$ est une force centrale de centre G.

② Conservation du moment cinétique $\vec{L}^*$ dans $\mathcal{R}^*$:

• M particule fictive tq $\vec{GM} = \vec{M_1 M_2}$

• $\vec{L}^*(M) = \vec{GM} \wedge \mu \vec{v}^* \Rightarrow$ proposition: $\frac{d\vec{L}^*(M)}{dt}_{\mathcal{R}^*} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ proposition: La trajectoire de la particule fictive M est située dans un plan Π passant par G et $\perp \vec{L}_G^*$.

• Loi des aires: $\frac{dS}{dt} = \frac{c}{2} = \frac{L_G^*}{2\mu}$

$c = r^2 \dot{\theta}$ constante des aires

$$\vec{L}_G^* = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = L_G^* \vec{e}_z$$

• Trajectoire: car $\vec{F}_{12} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r(M) \Rightarrow$ attractive ($k > 0$)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

$$\text{avec } \begin{cases} p = \frac{m c^2}{k} > 0 \\ e = A p \quad (A > 0) \end{cases}$$

③ Energie mécanique du système $\{M_1, M_2\}$:

• Energie cinétique $E_C^* = \frac{\mu}{2} \vec{v}^{*2}$

• Energie potentielle effective:

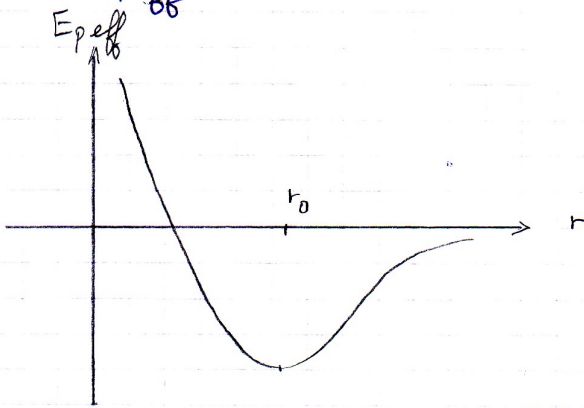
$$E_{P_{eff}}(r) = \frac{\mu c^2}{2 r^2} + E_p(r)$$

• Energie mécanique:

$$E_m^* = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} + E_p(r) = \text{cte}$$

$\nwarrow$ énergie cinétique radiale dans $\mathcal{R}^*$

$$E_m^* - E_{P_{eff}}(r) = E_{Cr}^* \geq 0 \Rightarrow E_m^* \geq E_{P_{eff}}(r) \text{ pour un } m^{\text{et}} \text{ possible}$$



Cas attractif: $k > 0$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$$

- Cas1: $E_m^* < E_{\text{peff}}(r_0) \Rightarrow m^{\text{ot}}$ impossible

- Cas2: $E_m^* = E_{\text{peff}}(r_0) \Rightarrow$ c'est un état lié

$$r_0^2 = (x_{M_2} - x_{M_1})^2 + (y_{M_2} - y_{M_1})^2$$

M_2 décrit un cercle de centre M_1 et de rayon r_0 .

- Cas3: $E_{\text{peff}}(r_0) < E_m^* < 0$

$r \in]0, r_1[\cup]r_2, +\infty[\Rightarrow m^{\text{ot}}$ impossible

$r \in [r_1, r_2] \Rightarrow$ c'est un état lié

$\Rightarrow M$ décrit une ellipse de demi-grand axe r_2 et de demi-petit axe r_1 .

- Cas4: $E_m^* > 0$

$\forall r \in]0, r_3[\Rightarrow m^{\text{ot}}$ impossible

$\forall r \in [r_3, +\infty[\Rightarrow E_m^* > E_{\text{peff}}$

$\Rightarrow$ La particule M_2 s'approche de M_1 jusqu'à la distance r_3 puis elle repart à l'infini $\Rightarrow$ état de diffusion.

Leçon n°1: Champ et potentiel électrostatique de distribution de charges ponctuelles

1. La charge électrique :

a) Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

b) Quantification de la charge :

Toute particule chargée porte une charge $Q = ne$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

c) Invariance de la charge :

La charge électrique est invariante par changement de référentiel.

2. Modèle de charge ponctuelle :

Définition 1: Charge ponctuelle :

C'est une charge dont les dimensions géométriques sont négligeables par rapport à la distance entre la charge et le point M de l'étude.

Définition 2: Système de charges ponctuelles :

Un système de n charges ponctuelles $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ placées respectivement aux points $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est appelé système discret de charges.

Définition 3: Charge totale d'un système discret :

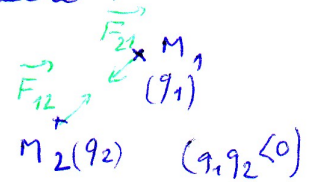
C'est la quantité d'électricité totale de ce système, notée Q , telle que :

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i$$

Remarque : Q est assimilée à une charge ponctuelle si le point de l'étude électrostatique est situé très loin du système discret.

3. Loi de Coulomb :

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_1 M_2}{\|\vec{M}_1 M_2\|^3}$$



Rq1: $\vec{F}_{12} = -\frac{k}{r^2} \vec{U}_r$ avec $k = \frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$ $\begin{cases} k > 0 & \text{attractive} \\ k < 0 & \text{repulsive} \end{cases}$

Rq2: Comparaison avec l'interaction de gravitation :

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{U}_r \quad G > 0$$

$$= -\frac{k}{r^2} \text{ avec } k = G m_1 m_2 > 0 \text{ toujours attractive}$$

$\vec{F}_g$ est négligeable devant $\vec{F}_e$.

3.1. Principe de superposition :

Théorème de superposition :

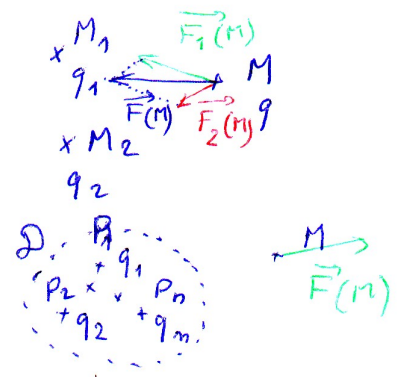
$$\vec{F}(M) = \vec{F}_1(M) + \vec{F}_2(M)$$

3.2. Généralisation :

Soit une distribution D discrète (discontinue) de charges $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ placées aux points $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$

Soit q une charge ponctuelle placée en M .

$$\vec{F}(M) = q \sum_{i=1}^n \frac{q_i \vec{M}_i M}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{M}_i M\|^3} \quad (M \neq M_i)$$



4 - Champ électrostatique:

$$\vec{E}(M) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(M)}{q}$$

Rq: $\vec{F}(M) = q \vec{E}(M)$

4-1. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle:

Soit q une charge ponctuelle placée en P .

Alors, cette charge crée en tout point M de l'espace un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ donné par:

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad \text{avec } P \neq M.$$

⚠ Quand $M \rightarrow P \Rightarrow \|\vec{E}(M)\| \rightarrow +\infty$
On dit que $\vec{E}(M)$ est singulier au point P .

4-2. Champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges ponctuelles:

Soit $\mathcal{D} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ une distribution de charges ponctuelles placées aux pts $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ et M un pt de l'espace ($M \neq P_i$)

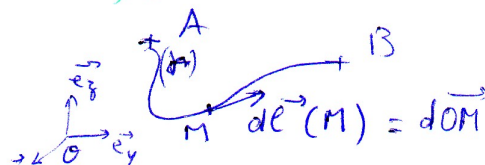
$$\text{Soit } \vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_iM}}{\|\vec{P_iM}\|^3}$$

D'après le théorème de superposition: $\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M)$.

5-1. Circulation du champ électrostatique $\vec{E}(M)$:

On appelle circulation du champ vectoriel $\vec{E}(M)$ le long de la courbe (γ) l'intégrale

$$C_{AB}(\gamma) = \int_{\gamma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}(M)$$



$\delta C = \vec{E}(M) d\vec{\ell}(M)$ est appelé circulation élémentaire,

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{\|\vec{PM}\|}\right).$$

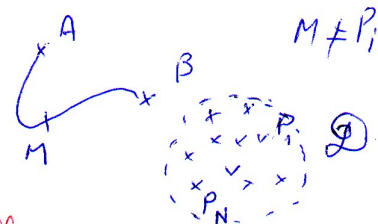
$$C_{AB}(\gamma) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{PA}\|} - \frac{1}{\|\vec{PB}\|} \right)$$

1/ La circulation $C_{AB}(\gamma)$ ne dépend que de la courbe (γ) joignant A et B (indépendante du chemin suivi). On dit que la circulation du champ $\vec{E}(M)$ se conserve

2/ Si (γ) est une courbe fermée: $\int_{\gamma} \vec{E}(M) d\vec{\ell} = 0$, on dit que le champ $\vec{E}$ est à circulation conservatrice. On note $\gamma_{\text{fermée}} \iff \oint_{\gamma}$

5-2. Circulation du champ $\vec{E}(M)$ créé par une distribution discrète de charges $\mathcal{D}$:

$$C_{AB}(\gamma) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\|\vec{P_iA}\|} - \frac{1}{\|\vec{P_iB}\|} \right]$$



6 - Potentiel électrostatique:

6-1. Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|}$$

$\vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}(M) = -dV(M)$ On dit alors que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive d'un potentiel électrostatique $V(M)$

d dp entre A et B: $V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}(M) d\vec{\ell}(M) \quad (M \in \gamma)$

6-2- Potentiel électrostatique créé par une distribution discrète de charges $\mathcal{D}$:

D'après le théorème de superposition :

$$V(M) = \sum_{i=1}^N V_i(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \|P_i M\|}$$

7. Forme locale du champ électrostatique : Relation entre $\vec{E}(M)$ et $V(M)$:

1^{ère} forme locale: $dV(M) = -\vec{E}(M) d\ell(M)$

2^{ème} forme locale: $\vec{E}(M) = -\text{grad} V(M)$

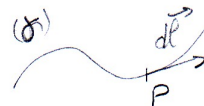
Leçon n°2: Champ et potentiel électrostatique de distribution de charge continue

1. Champ électrostatique créé par une distribution continue de charge:

1.1. Distribution linéique de charge:

a/ Modèle de charge continue, charge élémentaire:

$dq(P)$ = charge élémentaire (charge ponctuelle)
au point P.



$$\lambda(P) = \frac{dq(P)}{d\ell(P)} = \frac{\text{charge élémentaire}}{\text{longueur élémentaire}}$$

densité linéique de charge au point P.

b/ Modèle du champ électrostatique créé par une distribution linéique de charge:

Champ électrostatique élémentaire: $d\vec{E}(M) = \frac{dq(P) \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|^3}$

$d\vec{E}(M) \leftrightarrow d_P \vec{E}(M)$: différentielle par rapport à P.

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \sum_{P \in \mathcal{D}} d_P \vec{E}(M) = \int_{\mathcal{D}} d_P \vec{E}(M) \\ &= \int_{\mathcal{D}} \frac{dq(P) \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|^3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\lambda(P) \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|^3} d\ell(P)}$$

champ électrostatique créé par une distribution linéique $\mathcal{D} = \{\gamma\}$

Rq1: Le champ E n'est pas défini pour $M \in \gamma$.

$\Rightarrow \vec{E}(M) = \infty$ champ singulier pour $M \in \gamma$.

Rq2: Si $\lambda(P) = \lambda_0$ indépendant du pt P $\Rightarrow \lambda(P)$ est densité uniforme.

Rq3: $\vec{E}(M)$ est continue dans $\mathbb{R}^3 - \{\gamma\}$

c/ Calcul de la charge totale Q de la distribution linéique:

$$Q = \sum_{P \in \mathcal{D}} dq(P) = \int_{\mathcal{D}} dq(P) = \int_{\mathcal{D}} \lambda(P) d\ell(P)$$

1.2. Distribution surfacique continue de charge:

a/ Modèle de charge:

$dS(P)$ = surface élémentaire

$|S| = \sum dS(P)$: surface



$$\sigma(P) = \frac{dq(P)}{dS(P)} = \frac{\text{charge élémentaire}}{\text{surface élémentaire}}$$

densité surfacique de charge au point P.

$dq(P) = \sigma(P) \cdot dS(P)$: Charge élémentaire surfacique au point P.

Rq1 si $\sigma(P) = \sigma_0$ indépendante de P $\Rightarrow \sigma$: densité surfacique uniforme de charge

b/ Champ $\vec{E}(M)$ créé par une distribution surfacique :

$$\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma(P) \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|^3} dS(P) : \text{champ créé par la distribution surfacique de densité } \sigma(P).$$

Rq2. Pour une distribution surfacique de charge, $\vec{E}(M)$ est défini en tout pt M de $\mathbb{R}^3$.

• $\vec{E}(M)$ est continue en tout pt M de $\mathbb{R}^3$ (espace) tq $M \notin S$.

• $\vec{E}(M)$ est discontinue à la traversée de S.

$M = M^+ = M^-$ géométriquement, or $\vec{E}(M^+) \neq \vec{E}(M^-)$



c/ Charge totale de D :

$$Q = \iint_S \sigma(P) dS(P)$$

1-3- Distribution volumique continue de charge :

a/ Densité volumique de charge au pt P :

$$\rho(P) = \frac{dq(P)}{dv(P)} = \frac{\text{charge élémentaire}}{\text{volume élémentaire}}$$

b/ Champ électrostatique créé par une distribution volumique ρ :

$$\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho(P) \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|^3} dv$$

c/ Commentaires :

c1/ Le champ $\vec{E}(M)$ est défini et continu en tout pt M de l'espace ($\forall M \in \mathbb{R}^3$)

2. Circulation du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ - Potentiel électrostatique $V(M)$:

$\delta C = \vec{E}(M) d\vec{l}(M)$: circulation élémentaire de $\vec{E}$ (d_M : différentielle sur M)

$$= - d_M \left(\int_{P \in D} \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} \right) = - d_M V(M)$$

$$V(M) = \int_D \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} + c \quad \text{; potentiel électrostatique créé par la distribution de charge } D \text{ au pt } M.$$

* Cas 1: D : domaine confiné (borné) : Dans ce cas, il n'y a pas de charge à ∞
 $\Rightarrow V(\infty) = 0 \Rightarrow c = 0$

* Cas 2: D est infini (suivant une direction) ; On considère un pt M_0 fixé quelconque et on pose $V(M_0) = 0$: origine des potentiels. On a donc

$$V(M_0) = V^*(M_0) + c \Rightarrow c = -V^*(M_0) \quad \left(V^*(M_0) = \int_D \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}_0\|} \right)$$

Remarque : La constante c n'a pas de signification physique, on omet donc c

$$\Rightarrow V(M) = \int_D \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|}$$

Commentaires :

c1/ $D = \{\gamma\}$ linéique : $V(M)$ n'est pas défini au pt $M \in \gamma$ et $V(M)$ est continu en tout pt sauf γ

c2/ $D = \{S\}$ surfacique : $V(M)$ est défini et continu en tout pt $M \in \mathbb{R}^3$.

c3/ $D = \{V\}$ volumique : $V(M)$ est défini et continu en tout pt $M \in \mathbb{R}^3$

3. Relations locales entre $\vec{E}$ et V :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) d\vec{\ell}(M) \quad 1^{\text{ère}} \text{ relation locale}$$

$$\vec{E}(M) = -\text{grad} V(M) \quad 2^{\text{ème}} \text{ relation locale}$$

4. Topographie des champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et potentiel $V(M)$:

4-1. Topographie du champ électrostatique $\vec{E}(M)$:

a) Ligne de champ:

- **Définition:** On appelle ligne de champ (de $\vec{E}$) une courbe γ où le champ $\vec{E}(M)$ est constamment tangent à la courbe γ .

$$(\gamma) \text{ ligne de champ} \Leftrightarrow \vec{E}(M) \text{ est tangent à } (\gamma) \forall M \in (\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}(M) \wedge d\vec{\ell} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}(M) \text{ est parallèle à } d\vec{\ell}(M) \forall M \in (\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha(M) \text{ tq } \vec{E}(M) = \alpha(M) d\vec{\ell}(M).$$

- **Système de coordonnées cartésiennes:**

$$M(x, y, z); \vec{E}(M) = E_x(M)\vec{u}_x + E_y(M)\vec{u}_y + E_z(M)\vec{u}_z$$

$$M \in (\gamma) \text{ ligne de champ} \Leftrightarrow \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

- **Système de coordonnées cylindriques:**

$$M(\rho, \varphi, z); \vec{E}(M) = E_\rho(M)\vec{u}_\rho(M) + E_\varphi(M)\vec{u}_\varphi(M) + E_z(M)\vec{u}_z$$

$$M \in (\gamma) \text{ ligne de champ} \Leftrightarrow \frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$$

- **Système de coordonnées sphériques:**

$$M(r, \theta, \varphi); \vec{E}(M) = E_r(M)\vec{u}_r(M) + E_\theta(M)\vec{u}_\theta(M) + E_\varphi(M)\vec{u}_\varphi(M)$$

$$M \in (\gamma) \text{ ligne de champ} \Leftrightarrow \frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

- ⚠ Avec la convention: • Si $E_x = 0$ alors $dx = 0 \Rightarrow x = \text{cte} \forall M \in \gamma$
 • Si $E_\varphi = 0$ alors $\rho d\varphi = 0$ or $\rho \neq 0 \Rightarrow d\varphi = 0 \Rightarrow \varphi(M) = \text{cte} \forall M \in \gamma$.

b) Propriétés des lignes de champ:

- P1: deux lignes de champ ne se coupent jamais en un pt M sauf si $\vec{E}(M) = \vec{0}$ en M
 ou $\|\vec{E}(M)\| \rightarrow \infty$ en M : $\vec{E}(M)$ singulier en M .

- P2: Les lignes de champ électrostatique ne peuvent pas être des courbes fermées.
 $\vec{E}(M)$ ne peut pas être en rotation. On dit que $\vec{E}(M)$ est rotationnellement nul.

4-2. Topographie du potentiel électrostatique $V(M)$:

a) Surface de niveau:

$$S_k(f) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = k \text{ avec } k = \text{cte}\} \text{ est appelé surface de niveau associée à } f.$$

Quand k varie, $S_k(f)$ décrit une famille de surfaces de niveau du champ scalaire $f(x, y, z)$.

b) Propriétés des surfaces de niveau:

- P1: Les surfaces de niveau ne se coupent jamais.

- P2: $M_0 \in S_k(f)$ alors $\text{grad} f(M_0) \perp S_k(f)$ en M_0 .

P₃: Soit $M_0 \in S_k(f)$ surface de niveau. Alors $\vec{\text{grad}} f(M_0)$ pointe vers les surfaces de niveau croissant.

c) Surface équipotentielle et ligne de champ:

• Surface équipotentielle = C'est une surface de niveau du champ scalaire potentielle électrostatique $V(M)$.

$$S_{V_0} = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid V(M) = V_0\}$$

P₄: Les lignes des champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ sont orientées vers les potentiels décroissants

P₅: $\vec{E}(M) \perp$ surfaces équipotentielles S_{V_0} .

5. Rappel - Calcul d'intégrale:

5.1. Intégrale de surface:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) \quad [f \text{ fonction à variables séparables}]$$

$$\Rightarrow \iint_S f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_1(x) f_2(y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) dx \int_{y_1}^{y_2} f_2(y) dy.$$

5.2. Intégrale de volume:

$$f(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z) \quad [f \text{ fonction à variables séparables}]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) dx \int_{y_1}^{y_2} f_2(y) dy \int_{z_1}^{z_2} f_3(z) dz. \end{aligned}$$

1 - Caractère polaire du champ $\vec{E}$:

Définition: $\vec{E}$ est un vecteur polaire (vrai vecteur) ssi l'orientation de $\vec{E}$ ne dépend pas du repère choisi.

• Soit π un plan quelconque, On peut toujours décomposer $\vec{E}(M)$ tp
 $\vec{E}(M) = \vec{E}_t(M) + \vec{E}_n(M)$ avec $\vec{E}_t(M) \parallel \pi$ et $\vec{E}_n(M) \perp \pi$

• Soit $M' \in S_\pi(M)$

$\vec{E}(M)$ est un vecteur polaire $\Leftrightarrow \vec{E}(M') = \vec{E}_t(M) - \vec{E}_n(M)$

2 - Plan de symétrie et d'antisymétrie pour distribution de charge:

- Soit $\mathcal{D}$ une distribution de charge de densité ρ (linéique, surfacique, volumique)
- Soit π un plan et $P \in \mathcal{D}$, $P' = S_\pi(P) \in \mathcal{D}$.

Définition 1: plan de symétrie (symétrie paire)

π est un plan de symétrie pour la distribution de charge $\mathcal{D} \Leftrightarrow \rho(P') = \rho(P)$

Définition 2: plan d'antisymétrie (symétrie impaire)

π est un plan d'antisymétrie pour la distribution de charge $\mathcal{D} \Leftrightarrow \rho(P') = -\rho(P)$

3 - Détermination de la direction du champ $\vec{E}$:

Proposition 1: • Soit π un plan de symétrie pour une distribution de charge $\mathcal{D}$.
 • Soit $M' = S_\pi(M)$ avec M quelconque et $M' \neq M$.

$\vec{E}(M)$ est un vecteur polaire alors $\vec{E}(M') = \vec{E}_t(M) - \vec{E}_n(M) \forall M \neq M'$

Proposition 2: • Soit π un plan d'antisymétrie pour une distribution de charge $\mathcal{D}$.
 • Soit $M' = S_\pi(M)$ et $\vec{E}(M)$ un vecteur polaire.

alors $\vec{E}(M') = -\vec{E}_t(M) + \vec{E}_n(M) \forall M' \neq M$.

Théorème 1: • $\pi(M)$ est un plan de symétrie pour la distribution de charge $\mathcal{D}$.
 • $\vec{E}(M)$ est un vecteur polaire

$\Rightarrow$ Alors $\vec{E}(M) \parallel \pi(M) \Leftrightarrow \vec{E}_n(M) = \vec{0}$

Théorème 2: • $\pi(M)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution de charge $\mathcal{D}$.

• $\vec{E}(M)$ est un vecteur polaire

$\Rightarrow$ Alors $\vec{E}(M) \perp \pi(M) \Leftrightarrow \vec{E}_t(M) = \vec{0}$

4 - Éléments de symétrie et variables d'espace des champs $\vec{E}$ et V :

Définition: On appelle élément de symétrie d'un objet les transformations géométriques qui laissent invariant cet objet.

Les transformations usuelles:

- Translation suivant un axe
- Rotation d'angle φ autour d'un axe
- Symétrie % à un plan ou % à un point.

Principe de Curie: La symétrie de la distribution de charge $\mathcal{D}$ (la cause) doit se trouver dans les champs $\vec{E}$ et V (l'effet).

① Symétrie de translation:

Soit $M(x, y, z)$ dans $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et soit $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z)$

Si toute translation suivant, par exemple, l'axe (Oz) laisse invariant la distribution de charge suivant (Oz) , alors, d'après le principe de Curie, $\vec{E}(x, y, z)$ est indépendant de $z \Rightarrow \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)$.

Remarque:

- La distribution de charge est de longueur infinie suivant l'axe (Oz) .
- La distribution de charge est uniforme suivant l'axe (Oz) .

② Symétrie de rotation:

Soient $M(\rho, \varphi, z)$ et $\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho, \varphi, z)$ dans $R(O, \vec{u}_\rho(M), \vec{u}_\varphi(M), \vec{u}_z(M))$

• Si toute rotation d'angle φ suivant l'axe (Oz) laisse invariant la distribution de charge, alors, d'après le principe de Curie, $\vec{E}(\rho, \varphi, z)$ est indépendant de φ .
 $\Rightarrow \vec{E}(\rho, \varphi, z) = \vec{E}(\rho, z)$.

• Si de plus toute translation suivant (Oz) laisse invariant la distribution de charge, alors, d'après le principe de Curie, $\vec{E}(\rho, \varphi, z)$ est indépendant de z .
d'où $\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \vec{E}(\rho)$.

③ Symétrie sphérique:

Soient $M(r, \theta, \varphi)$ et $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$ dans $R(O, \vec{u}_r(M), \vec{u}_\theta(M), \vec{u}_\varphi(M))$.

• Si toute rotation autour d'un point fixe O (par exemple) laisse invariant la distribution de charge, alors, d'après le principe de Curie, $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$ est indépendant de θ et φ . Par la suite, $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)$

exosup.com

II - Flux du champ électrostatique :

Définition: Flux de $\vec{E}$

Le flux du champ $\vec{E}$ à travers une surface (S) orientée est défini par

$$\Phi = \iint_S \vec{E}(\vec{M}) \cdot d\vec{S}(\vec{M}) \quad \text{où } d\vec{S}(\vec{M}) = dS(\vec{M}) \cdot \vec{n}_M$$

Définition: Tube de champ $\vec{E}$:

Un tube de champ $\vec{E}$ est une surface orientée fermée, formée par les lignes de champ $\vec{E}$ et reposant sur deux contours C_1 et C_2 .

$$\Phi = \iint_{\text{tube de champ}} \vec{E}(\vec{M}) \cdot d\vec{S}(\vec{M}) = 0$$

① Expression du flux en fonction de l'angle solide:

$$\Phi = \sum_{P \in D} \frac{dq(P) \Omega(P)}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{avec } \Omega(P) = \iint_S \frac{\vec{PM} \cdot d\vec{S}(\vec{M})}{\|\vec{PM}\|^3}$$

Discussion: cas 1: $D \subset V_S$

$$\Omega(P) = 4\pi \Rightarrow \Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

cas 2: $D \cap V_S = \emptyset$

$$\Omega(P) = 0 \Rightarrow \Phi = 0$$

cas 3: $D \cap V_S \neq \emptyset$

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

avec $Q_{\text{int}} = \iint_{D \cap V_S} dq(P)$
charge totale intérieure à la surface (S).

② Théorème de Gauss:

Théorème:

- Soit (S) une surface fermée quelconque et orientée
- Soit $\vec{E}(\vec{M})$ le champ électrostatique créé par la distribution de charges
- Soit $\Phi = \iint_S \vec{E}(\vec{M}) \cdot d\vec{S}(\vec{M})$ le flux de $\vec{E}$ à travers la surface (S).

Alors:

$$\Phi = \iint_S \vec{E}(\vec{M}) \cdot d\vec{S}(\vec{M}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

1. Définition:

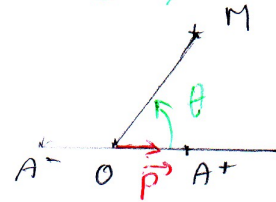
Un dipôle électrostatique est une distribution composée par deux charges ponctuelles $\{q^+, q^-\}$ placées en A^+ et A^- et qui vérifient les hypothèses suivantes:

H1) La charge totale $Q = 0$

H2) Le moment dipolaire $\vec{P}(0) = q \vec{A^- A^+}$

H3) Le pt M où on veut calculer les champs ($\vec{E}(M)$ et $V(M)$) est situé très loin de $\{q^+, q^-\}$ $\Leftrightarrow \frac{\|\vec{A^- A^+}\|}{\|\vec{OM}\|} \ll 1$.

H4) On pose $\theta = (\vec{P}, \vec{OM})$



2. Potentiel du dipôle électrostatique:

$$V(M) = \frac{q a \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

avec $\begin{cases} a = A^- A^+ \\ r = OM \end{cases}$

Expression intrinsèque: $V(M) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{OM}}{4 \pi \epsilon_0 \|\vec{OM}\|^3}$

3. Champ électrostatique créé par un dipôle:

$$\vec{E}(M) = \frac{2P \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \vec{U}_r(M) + \frac{P \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \vec{U}_\theta(M)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 r^3} (2(\vec{P} \cdot \vec{U}_r) \vec{U}_r - (\vec{P} \cdot \vec{U}_\theta) \vec{U}_\theta)$$

4. Expressions intrinsèques des champs associés à un dipôle électrostatique:

1- Pour le potentiel $V(M)$: $V(M) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{OM}}{4 \pi \epsilon_0 \|\vec{OM}\|^3}$

2- Pour le champ électrostatique:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \|\vec{OM}\|^3} \left[\frac{3(\vec{P} \cdot \vec{OM}) \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^2} - \vec{P} \right]$$

3. Commentaires:

→ Charge ponctuelle: Le potentiel V varie en $\frac{1}{r}$

→ Le champ $\vec{E}$ varie en $\frac{1}{r^2}$

→ Dipôle électrostatique: Le potentiel V varie en $\frac{1}{r^2}$

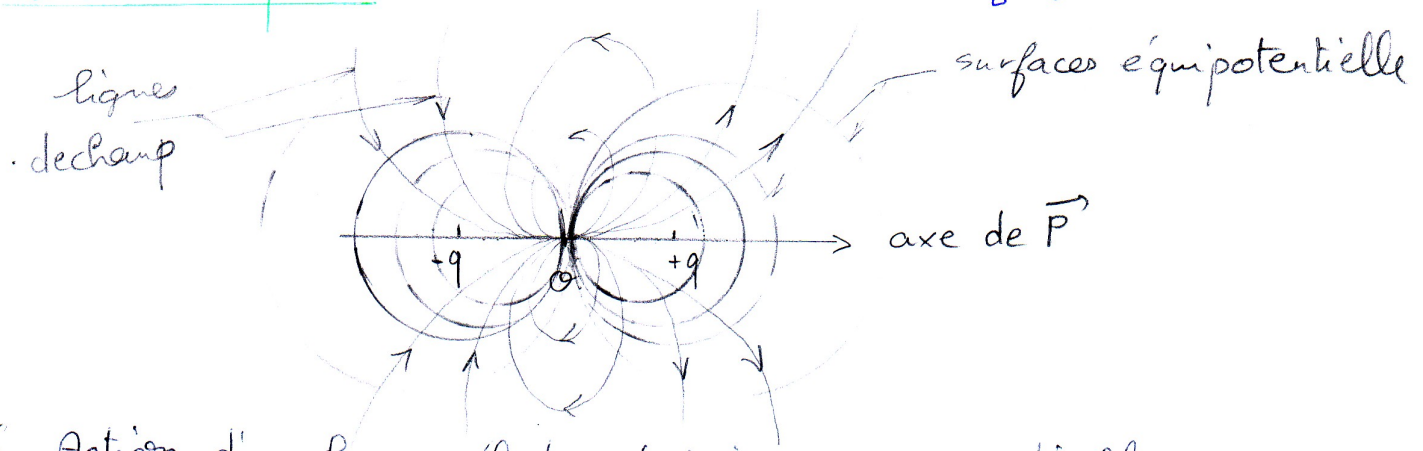
→ Le champ $\vec{E}$ varie en $\frac{1}{r^3}$

5. Topographie des champs $\vec{E}(M)$ et $V(M)$:

Les lignes de champ $\vec{E}$ vérifient $\vec{E} \wedge d\vec{\ell}(M) = \vec{0}$

$$r = A \sin^2 \theta$$

Surfaces équipotentielle vérifient $r^2 = \frac{q a \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 V_0}$
Allure du dipôle:

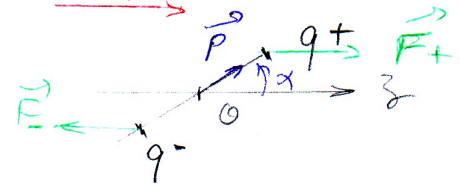


6 - Action d'un champ électrostatique sur un dipôle:

Dans un champ extérieur $\vec{E}_0$ (uniforme)

Le dipôle est en

- ▷ équilibre stable si $\alpha = 0$
- ▷ équilibre instable si $\alpha = \pi$



Commentaire:

Un champ extérieur uniforme tend à orienter le dipôle suivant les lignes de champ.

Leçon n°6: Introduction à la magnétostatique

1- Les interactions magnétiques:

Dans le vide, au voisinage d'un aimant ou d'un courant parcourant un fil conducteur chargé, mobile est soumis à une force magnétique

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{force de Laplace où } \vec{B}: \text{champ magnétique}$$

2- Loi de Biot Savart pour les circuits filiformes:

2-1. Vecteur élémentaire de courant:

Un circuit filiforme est une courbe (γ) fermée dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$ parcourue par un courant constant I .

Définition: Vecteur de courant élémentaire:

Par définition, $d\vec{C}(P) = I d\vec{\ell}(P)$ est le vecteur élémentaire de courant au point P . $d\vec{C}(P)$ est toujours orienté dans le même sens que le courant I parcourant (P) . $d\vec{C}(P)$ est tangent à (γ) .

2-2. Champ magnétique créé par un fil filiforme:

$d\vec{C}(P)$ en P crée en tout pt M de l'espace $\forall M \notin (\gamma)$ un champ magnétique élémentaire défini par la loi de Biot-Savart:

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{C}(P) \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ dans le vide
unité de $[\vec{B}]$: Tesla.

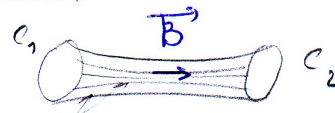
$$\vec{B}(M) = \int_{\gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C}(P) \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

$M \notin (\gamma)$

3- Topographie du champ magnétique $\vec{B}$:

* Ligne de champ: $\vec{B} \wedge d\vec{\ell}(M) = \vec{0}$

* Tube de champ: $\vec{B}(M) \perp d\vec{S}(M)$



4- Introduction à la symétrie du champ magnétique:

4-1. Caractère axial du champ magnétique $\vec{B}$ pseudovecteur:

$\vec{B}$ est un vecteur axial (pseudovecteur) ssi son orientation dépend de l'orientation de l'espace. Soit π un plan quelconque et $\vec{B}(M) = \vec{B}_t(M) + \vec{B}_n(M)$, avec $\vec{B}_t(M) \parallel \pi$ et $\vec{B}_n(M) \perp \pi$. Soit $M' = S_{\pi}(M)$.

$\vec{B}(M)$ est un vecteur axial $\Leftrightarrow \vec{B}(M') = -\vec{B}_t(M) + \vec{B}_n(M)$

4-2. Plan de symétrie et d'antisymétrie:

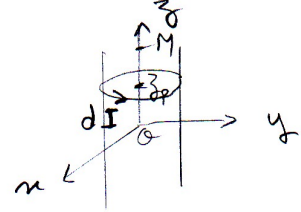
Soit D une distribution de courant, $P \in D$, $d\vec{C}(P)$ = vecteur de courant élémentaire en P , et $P' = S_{\pi}(P) \in D$.

Définition 1: Plan de symétrie - symétrie paire

π est un plan de symétrie pour la distribution de courant $\Leftrightarrow d\vec{C}(P') = d\vec{C}(P)$

Commentaire: Le vecteur élémentaire de courant n'a pas changé d'orientation par symétrie $\% \pi$.

$$M \in (Oz) \Rightarrow \vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0 d I R^2}{2(R^2 + (z_M - z_P)^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$



d'après le théorème de superposition :

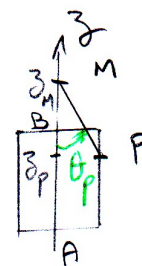
$$\vec{B}(M) = \sum_{z_P} \vec{B}_{sp}(M)$$

① Cas d'un solénoïde de longueur finie l :

$$B(z_M) = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \theta_A - \cos \theta_B]$$

② Cas d'un solénoïde de longueur infinie :

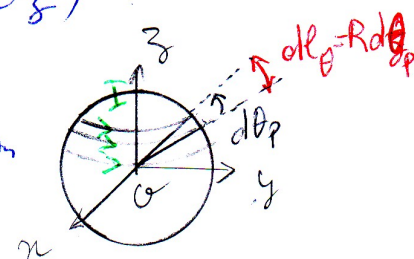
$$B(z_M) = \mu_0 n I$$



b) Solénoïde sphérique : $S(0, R)$ d'axe de pole (Oz)

L'élément de longueur suivant le méridien $dl_\theta = R d\theta$ est considéré en fermant une seule spire de rayon $r = R \sin \theta_P$ et parcourue par un courant dI

$$\begin{aligned} \vec{B}_{sp}(O) &= \frac{\mu_0 d I r^2}{2(r^2 + z_P^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 d I}{2r} \sin^3 \theta_P \vec{u}_z \end{aligned}$$



$$dI = n I r d\theta_P$$

$$B(0) = \frac{\mu_0 n I \pi}{4}$$

→ Cas d'une spire de section e : N : nombre total de spires

$$N = \frac{\pi R}{e}$$

$$B(0) = \frac{\mu_0 I \pi}{4e}$$

I - Flux du champ magnétique:

Soit S surface quelconque fermée.
L'intérieur de S peut contenir ou non des distributions de courant.

$$\oint_S \vec{B}(M) d\vec{S}(M) = \vec{0}$$

On dit que le champ magnétique est à flux **conservatif**.

Propriété 1:

$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ si (S) est un tube de champ car $\vec{B}$ est $\perp d\vec{S}$

Propriété 2:

$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{B}(M, t)$ dépend du temps t .

Remarque:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \neq 0$$

Le champ électrostatique est à flux non conservatif.

II - Théorème d'Ampère:

Soit $\vec{B}$ un champ magnétique créé par une distribution de courant, et soit C une courbe **fermée orientée** quelconque.
Alors, la circulation du champ $\vec{B}$ sur C est donnée par:

$$\oint_C \vec{B}(M) d\vec{r}(M) = \mu_0 \sum_{k=1}^n \bar{I}_k$$

somme algébrique de tous les courants enlaçant la courbe fermée C .

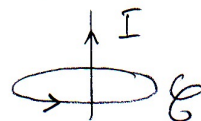
avec $\bar{I}_k = \begin{cases} +I_k & \text{si le sens de } I \\ & \text{et l'orientation de } C \text{ sont directs} \\ -I_k & \text{dans le sens contraire.} \end{cases}$

III - Calcul de $\vec{B}$ par le théorème d'Ampère:

① Fil infini (confondu avec (03))

Choix de la courbe C fermée: On prend C une ligne de champ $\vec{B}$.

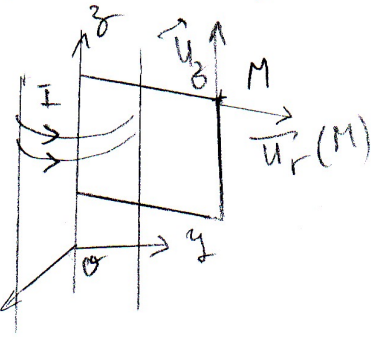
$$B(r_m) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_m}$$



② Solénoïde infini:

* Choix du contour $\mathcal{C}$: Les lignes de champ $\vec{B}$ sont parallèles à (Oz)
 ($\mathcal{C}$ est fermée par une autre courbe quelconque).
 $\mathcal{C}$ est un carré ou rectangle dans le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

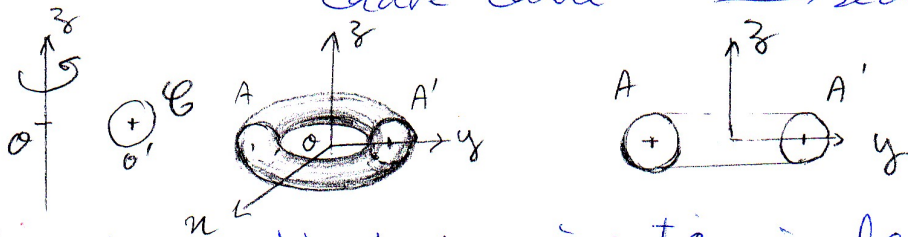
$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \mu_0 n I \vec{u}_z & \text{si } 0 \leq r_m < R \\ \vec{0} & \text{si } r_m > R \end{cases}$$



⚠ Physiquement, le champ $\vec{B}$ est continu en tout pt M à l'intérieur du solénoïde même si $M \in (Oz)$ car il n'y a aucun courant sur (Oz) .

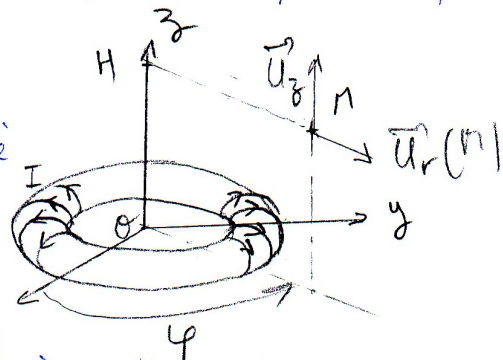
③ Bobine torique de section circulaire:

Un tore est une surface obtenue par rotation d'un cadre autour d'un axe. Par exemple: Cadre circulaire $\rightarrow$ section circulaire
 Cadre carré $\rightarrow$ section carrée



Définition: Une bobine torique à section circulaire est constituée par un enroulement de N spires circulaires jointives parcourues par le même courant I .

- > système de coordonnées: cylindrique
- > direction de $\vec{B}$: $\Pi(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie
 $\Rightarrow \vec{B}(M) = B_\varphi(M) \vec{u}_\varphi(M)$
 • la distribution est à symétrie cylindrique $\Rightarrow \vec{B}(r_m | z_n) = \vec{B}(r_m | z_n)$

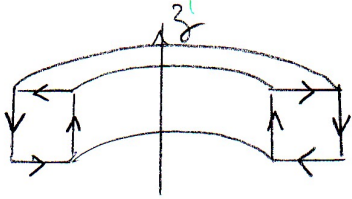


Remarque: les lignes de champ $\vec{B}$: cercles concentriques d'axe (Oz)

- > Choix du contour $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}$: cercle d'axe (Oz) et de rayon r_m (car les lignes de champ $\vec{B}$ sont des cercles d'axe (Oz)).

$$\vec{B}(r_m | z_n) = \begin{cases} B_{int}(r_m | z_n) \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_m} \vec{u}_\varphi(M) & \text{pour } M \in \mathcal{C}_{int} \\ B_{ext}(r_m | z_n) \vec{u}_\varphi = \vec{0} & \text{pour } M \in \mathcal{C}_{ext} \end{cases}$$

④ Bobine torique à section carrée:



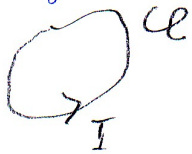
$$\vec{B}(M) = B(r_M, z_M) \vec{u}_\varphi(M)$$

$$\Phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{S}(M) \text{ où } S: \text{section de la spire}$$

$$= \frac{\mu_0 N I b}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0 + a}{r_0}\right).$$

Leçon 8: Le dipôle magnétique d'un courant filiforme

I. Définition: On appelle dipôle magnétique une boucle de courant de moment magnétique $\vec{m} = I \vec{S}$ créant un champ magnétique en M à très grande distance de la boucle



I: courant de la boucle C

$$\vec{S} = \iint_S d\vec{S}$$

$\vec{S}$: vecteur surface de la boucle C.

II. Champ magnétique d'un dipôle:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi \|\vec{OM}\|^3} \left[\frac{3\vec{m} \cdot \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^2} \vec{OM} - \vec{m} \right] \text{ indépendant du choix de l'origine O.}$$

Commentaire:

Dipôle électrostatique

$\vec{p}$: moment dipolaire
vecteur polaire

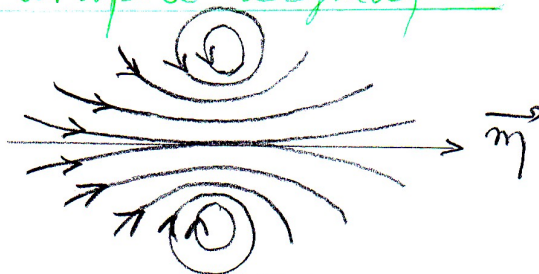
Dipôle magnétique

$\vec{m}$: moment magnétique
vecteur axial

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \left[3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p} \right] \longleftrightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m} \right]$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \longleftrightarrow \mu_0$$

⑤ Ligne de champ d'un dipôle magnétique:



③ Action d'un champ magnétique sur un circuit filiforme:

Soit C un circuit filiforme de vecteur de courant $d\vec{C}(P)$
On place C dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}_{ext}$
Alors, C est soumis à une force extérieure élémentaire

$$d\vec{F}(P) = d\vec{C}(P) \wedge \vec{B}_{\text{ext}} \quad \text{Loi de Laplace}$$

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{F}(P) \quad \text{résultante de la force de Laplace}$$

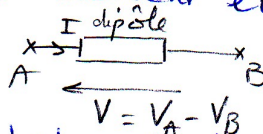
$$\text{Si } \vec{B}_{\text{ext}} \text{ est uniforme (indépendant de } P) \Rightarrow \vec{F} = \left(\int_{\mathcal{C}} d\vec{C}(P) \right) \wedge \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Condition d'équilibre: $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{\gamma} = \vec{0} \text{ avec } \vec{\gamma} = \vec{\eta} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} \end{cases}$
 $\quad \quad \quad \nwarrow \text{moment résultant.}$

1. Dipôle électrique :

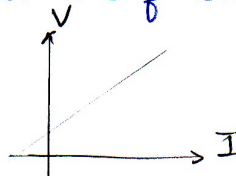
1-1. Définitions :

Def1: Un dipôle électrique est un élément électrique branché entre deux bornes A et B



Def2: Les fonctions $V(I)$ ou $I(V)$ s'appellent caractéristique du dipôle

* Un dipôle est linéaire si $V(I)$ (ou $I(V)$) est une fonction linéaire de l'argument I (ou de l'argument V).



Def3: Un dipôle passif lorsqu'il ne peut pas fournir de l'énergie au circuit électrique. Il transforme l'énergie électrique en énergie calorifique.

Un dipôle actif lorsqu'il fournit de l'énergie au circuit électrique.

1-2. Dipôles électriques fondamentaux :

dipôle	symbole	Expression de V
résistance		$V = V_A - V_B = RI > 0$
générateur		$V = V_B - V_A = e - rI > 0$
récepteur		$V = V_A - V_B = e' + r'I > 0$
condensateur		$V = V_A - V_B = \frac{Q}{C}$ avec $I = \frac{dq}{dt}$
Inductance		$V = V_A - V_B = L \frac{dI}{dt}$

2. Les lois de Kirchhoff :

2-1. Définition :

- On appelle **nœud** le point de rencontre de trois fils ou plus
- On appelle **branche** une portion du circuit comprise entre deux nœuds consécutifs.
- On appelle **maille** une série de branches réalisant une boucle fermée.

2-2. Loi des nœuds : 1^{ère} loi de Kirchhoff :

En chaque nœud : $\sum_{\text{algébrique}} I_k = 0 \Rightarrow \sum I_{\text{arrivant}} = \sum I_{\text{sortant}}$

2-3. Loi des mailles: 2^{ème} loi de Kirchhoff:

$$\sum_{\text{algébrique}} V \text{ (tension)} = 0 \quad \text{pour toute maille orientée}$$

3. Théorème de superposition:

Dans un circuit contenant au moins 2 générateurs, le courant qui circule dans une branche est la somme algébrique des courants qui circulent dans cette branche quand chacun des générateurs agit séparément.

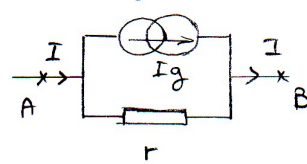
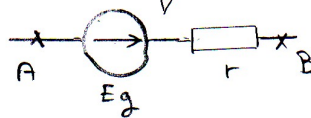
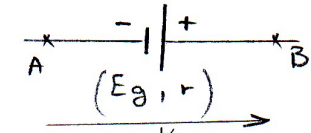
4. Les générateurs de tension et de courant:

4-1. Générateur de tension:

Le générateur de force électromotrice E_g et de résistance interne r est appelé générateur de tension.

$$V = V_B - V_A = E_g - rI$$

On le note aussi:



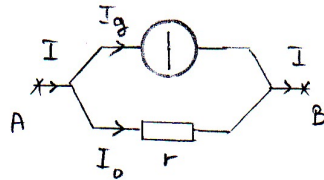
4-2. Générateur de courant:

On appelle générateur de courant (I_g, r) le circuit parallèle suivant:

$$I = I_g + I_0$$

On le note aussi:

I_g est appelé courant du court circuit I_{cc} .



4-3. Extinction de source de tension ou de courant:

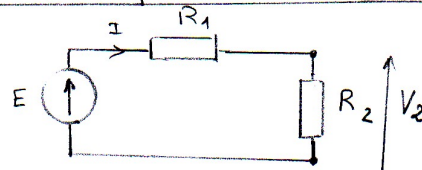
Source	source active (allumée)	source passive (éteinte)
générateur de tension		
générateur de courant		

4-4. Diviseur de tension:

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

V_2 est une fraction de E

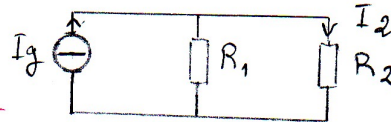
Le montage est appelé diviseur de tension.



4-5. Diviseur de courant:

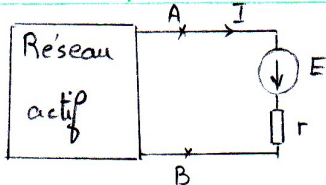
$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_g$$

Le montage est appelé diviseur de courant

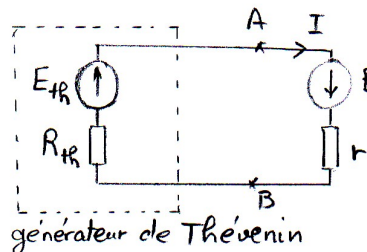


5. Théorème de Thévenin:

5-1. Énoncé du théorème de Thévenin:



$\equiv$

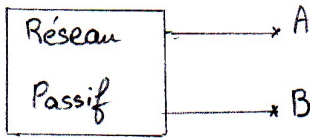


E_{th} : f.e.m du générateur de Thévenin

R_{th} : résistance de Thévenin

* Détermination de R_{th} :

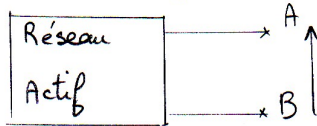
1. Débrancher la branche AB
2. Éteindre tous les générateurs de courant et de tension (indépendants).
3. Évaluer la résistance équivalente R_{th} "vue" entre A et B.



$$R_{AB} = R_{th}$$

* Détermination de E_{th} :

1. Débrancher la branche AB.
2. Tous les générateurs de tension et de courant sont allumés.

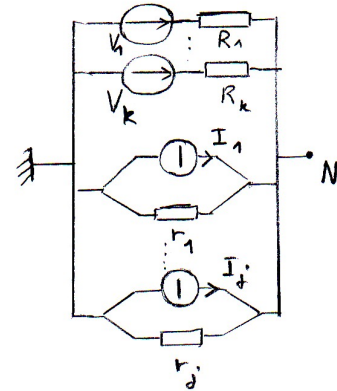


$$V = V_A - V_B = E_{th} \quad (qd \ I = 0)$$

Remarque: Pour déterminer V , on peut aussi utiliser le théorème de Millman.

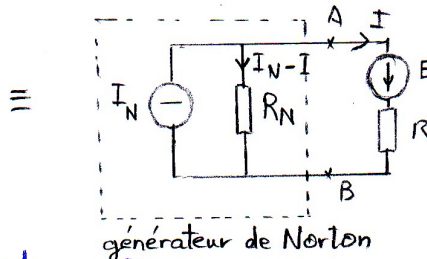
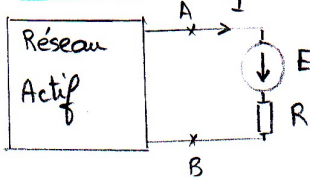
⚠ Il faut faire attention au sens des tensions. On retiendra que cette formule est valable lorsqu'on se place en convention récepteur avec les courants qui arrivent au nœud considéré.

$$V_N = \frac{\sum_k \frac{V_k}{R_k} + \sum_j \dot{I}_j}{\sum_k \frac{1}{R_k} + \sum_j \frac{1}{r_j}}$$



6. Théorème de Norton:

6.1. Énoncé:

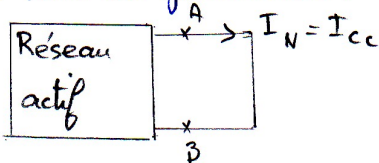


$$\begin{aligned} I_g &= I_N \\ I_o &= -\frac{V}{R_N} \\ I &= I_N - \frac{V}{R_N} \\ V &= V_A - V_B \end{aligned}$$

* Détermination de R_N : même méthode que R_{th}

* Détermination de I_N (I_{cc} : courant du court circuit).

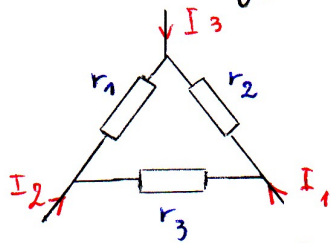
1. On débranche AB et on le remplace par un fil conducteur de résistance nulle.
 $I_N = I$ qd $V = 0$: courant entre A et B en court circuit.
2. Tous les générateurs sont actifs.



Remarque: Il y a dualité entre le théorème de Thévenin et le théorème de Norton.

$$\begin{aligned} R_N &= R_{th} \\ I_N &= \frac{E_{th}}{R_{th}} \end{aligned}$$

7. Théorème de Kennelly:

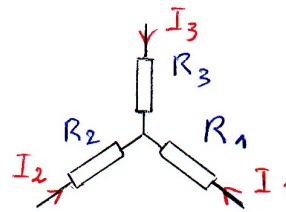


Montage triangle

$$R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$$

$$R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}$$



Montage étoile

$$r_1 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$$

$$r_3 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$$

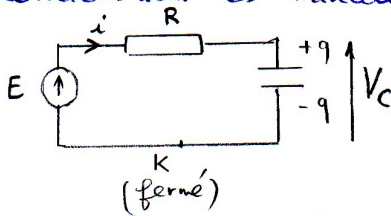
Leçon n°2

Circuit linéaire en régime transitoire

1. Circuit RC:

1.1. Charge d'un condensateur:

Le condensateur est initialement déchargé à $t=0$, $q(0)=0$.



$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$$

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

$$q_1(t) = A e^{-\frac{t}{RC}} = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

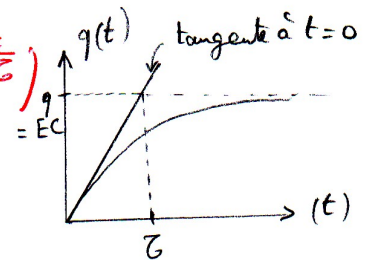
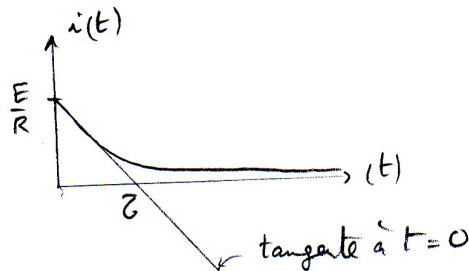
$$q_2(t) = EC$$

$\tau = RC$: constante du temps (en secondes)

* Détermination de A:

$$\text{À } t=0 \Rightarrow q(0)=0 \Rightarrow A = -EC \Rightarrow q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



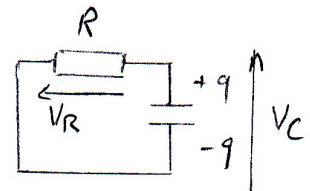
1.2. Décharge d'un condensateur:

On court-circuite la source de tension. Quand le régime continu est établi $\Rightarrow q(t) = q_\infty$

Condition initiale: à $t=0$ $q(0) = q_\infty = CE$

$$q(t) = CE e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Rq: Le signe (-) dans $i(t)$ traduit que le courant de décharge est en sens inverse du courant de charge.

1.3. Bilan énergétique :

Aucours de la charge, on a: $E = V_R + V_C$

$$\Rightarrow \int E i dt = \int V_R i(t) dt + \int V_C i(t) dt$$

$$dW_g = dW_R + dW_C$$

↑ Énergie élémentaire fournie par le générateur
↑ énergie dissipée par effet Joule dans la résistance
↑ énergie emmagasinée dans le condensateur.

$$W_g = CE^2$$

$$W_R = \frac{1}{2} CE^2$$

$$W_C = \frac{1}{2} CE^2$$

Interprétation : Aucours de la charge, l'énergie W_g est dissipée en moitié par effet Joule dans R et l'autre moitié est emmagasinée dans C .
Aucours de la décharge, on récupère la totalité de l'énergie emmagasinée dans le condensateur.

2. Circuit RL :

2.1. Interrupteur fermé; Charge :

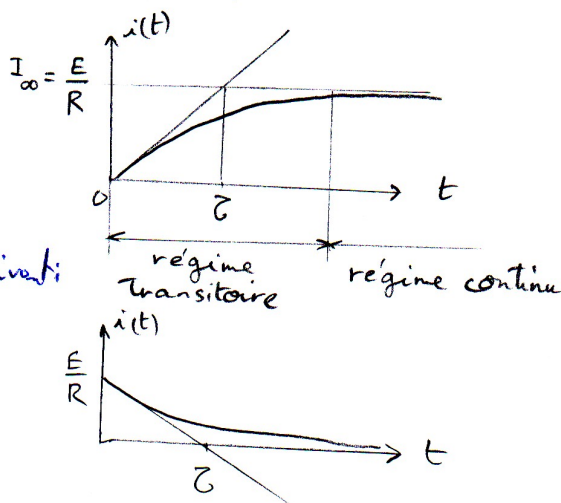
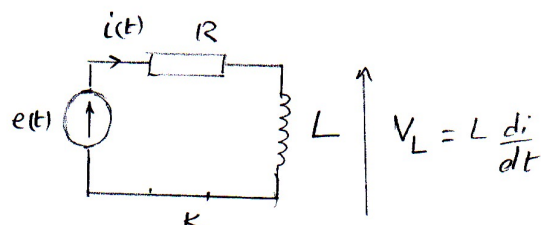
$$e(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \text{ K ouvert} \\ E & , t \geq 0 \text{ K fermé} \end{cases}$$

Condition initiale: $t = 0, i(0) = 0$

$$i(t) = A e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

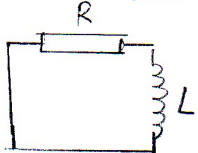
$$\tau = \frac{L}{R} : \text{constante du temps.} \quad A = -\frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



2.2. Court-circuit de la source de tension :

Lorsque le régime continu est établi, on court-circuite la source de tension, on a le montage suivant :



$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

2.3. Bilan énergétique :

* Cas du régime continu: (R passe de 0 $\rightarrow$ E)

$$E = V_R + V_L$$

$$\int E i dt = \int R i^2 dt + \int L i di$$

$$dW_g = dW_R + dW_L \leftarrow \text{énergie élémentaire emmagasinée dans la bobine.}$$

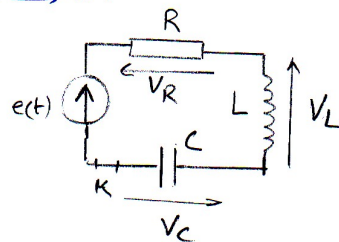
$$W_L = \frac{L}{2} \cdot \frac{E^2}{R^2}$$

$\rightarrow$ Cette énergie peut être restituée par effet Joule dans R lorsqu'on fait passer $e(t)$ de $E \rightarrow 0$.

3. Circuit RLC :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \text{ K ouvert} \\ E & , t \geq 0 \text{ K fermé} \end{cases}$$

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad V_C = \frac{q}{C}, \quad V_L = L \frac{di}{dt}$$



3-1. Régime libre ($e(t)=0$):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre ; $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ facteur de perte

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

résolution : 3 régimes : $\rightarrow$ apériodique $\rightarrow$ critique $\rightarrow$ pseudo-périodique.

3-2 - Bilan d'énergie:

$$E i dt = R i^2 dt + L i dt \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} i dt$$

$$\Rightarrow dW_g = dW_R + dW_L + dW_C$$

$$dW_g = dW_R + d(W_L + W_C)$$

Commentaire:

L'énergie fournie par le générateur est en partie dissipée par effet Joule dans la résistance R , et l'autre partie est emmagasinée dans la bobine et le condensateur.

Lorsque $e(t)$ passe de $E \rightarrow 0$ (régime libre) $dW_g = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(W_L + W_C) = - \frac{dW_R}{dt} = - R i^2 \leq 0$$

Discussion:

Régime non amorti : $R=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(W_L + W_C) = 0 \Rightarrow W_L + W_C = \text{cte} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$

$\Rightarrow$ L'énergie se conserve.

$\Rightarrow$ L'énergie oscille sans perte entre le condensateur et la bobine.

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$i(t) = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

exosup.com

Leçon n°3: Circuit en régime sinusoïdal alternatif

1. Impédance complexe d'un dipôle:

Loi d'Ohm en notation complexe:

$$\underline{V} = \underline{Z} \underline{i} \quad \text{avec } \underline{V}: \text{tension complexe du dipôle}$$
$$\underline{Z}: \text{impédance complexe du dipôle}$$
$$\underline{i}: \text{intensité complexe.}$$

Rq: $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$

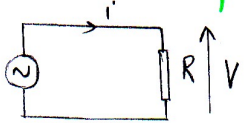
$$= Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi$$

$$= R + j S \quad \text{avec } R \geq 0 \text{ pour un dipôle passif}$$

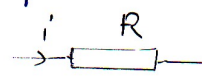
S: réactance et on pose $\frac{1}{\underline{Z}}$ admittance complexe.

2. Exemple d'admittance:

2.1. Résistance pure:

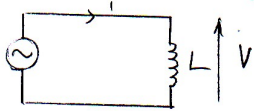


Pour un condensateur ohmique, on a $\forall t, V(t) = R i(t)$

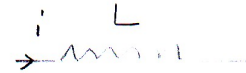


$$\underline{Z} = R$$
$$\varphi = 0$$

2.2. Inductance pure:



$$V(t) = L \frac{di}{dt}$$
$$\underline{V} = L j \omega \underline{i} \Rightarrow \underline{Z} = L j \omega$$



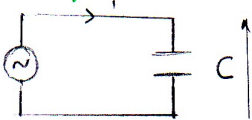
$\varphi = +\frac{\pi}{2}$ la tension est en quadrature avance sur l'intensité

Remarque:

Si $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |\underline{Z}| \rightarrow 0$: court circuit

Si $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |\underline{Z}| \rightarrow \infty$: coupe circuit

2.3. Capacités:



$$V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$\underline{V} = \frac{1}{C j \omega} \underline{i} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{1}{C j \omega}$$
$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

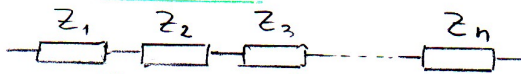
Remarque:

Si $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |\underline{Z}| \rightarrow \infty$: coupe circuit

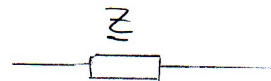
Si $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |\underline{Z}| \rightarrow 0$: court circuit

3. Association des impédances complexes:

3.1. En série:

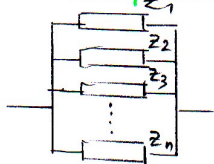


=

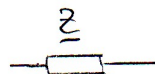


$$\text{avec } \underline{Z} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$$

3.2. En parallèle:



=

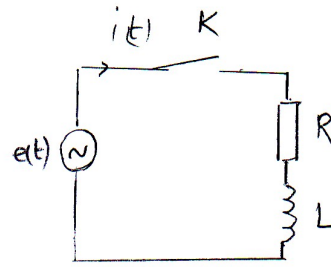


$$\text{avec } \underline{Z} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i}}$$

4- Application à l'étude des circuits:

4.1 - Circuit RL en notation complexe:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \text{ K ouvert} \\ E \cos(\omega t) & ; t \geq 0 \text{ si K fermé.} \end{cases}$$



$$\underline{Z} = R + jL\omega$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$\bullet \text{tg } \varphi = \frac{\text{Im } \underline{Z}}{\text{Re } \underline{Z}} = \frac{L\omega}{R} \Rightarrow \varphi = \arg \underline{Z} = \arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right) \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\bullet \underline{i} = \underline{i}_m e^{j\omega t} \quad \text{avec } \underline{i}_m = i_m e^{-j\varphi}$$

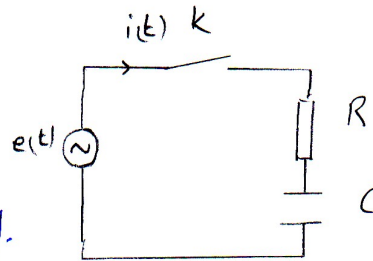
$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

4.2 - Circuit RC:

$$e(t) = E \cos(\omega t) \quad ; t > 0 \text{ (K fermé)}$$

$$i(t) = i_m \cos(\omega t - \varphi)$$

Rq: si $e(t) = E \sin(\omega t) \Rightarrow i(t) = i_m \sin(\omega t - \varphi)$.



$$\bullet \underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

$$\bullet \text{tg } \varphi = -\frac{1}{RC\omega} < 0 \Rightarrow \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$$

$$\bullet \underline{i}_m = \frac{e_m}{\underline{Z}} e^{j\varphi} \quad ; i_m = \frac{E}{Z} = \frac{E C \omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

$$i(t) = \frac{E C \omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

Rq: 1°/ Le retard $\varphi < 0$. On dit que le courant est en **avance** sur la tension.

Cette avance $(-\varphi)$ varie de $\frac{\pi}{2} \xrightarrow{a} 0$

2°/ Si $RC\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ dans ce cas, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

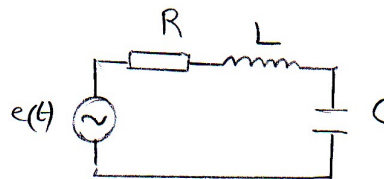
4.3 - Circuit RLC en série:

$$\bullet \underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

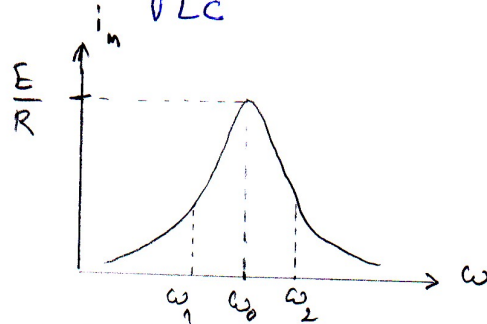
$$\bullet \text{tg } \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\bullet i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$



Remarque:

- 1°. À basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), $Z \rightarrow \infty \Rightarrow$ La capacité est **prépondérante**
• À haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), $Z \rightarrow \infty \Rightarrow$ L'inductance est **prépondérante**
- 2° $|Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ est un minimum quand
- i passe par un maximum
 - $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ noté ω_0 : **résonance d'intensité**



$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$: largeur de bande. On peut déterminer $\Delta\omega$ par : $\omega_{1,2} = \frac{1}{2L} \pm \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

La résonance est d'autant plus aiguë que Q est très grand.

5. Puissance en régime sinusoïdal:

$$P(t) = V(t) i(t)$$

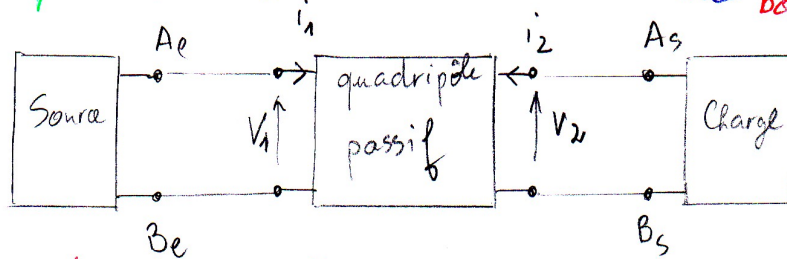
$$= \frac{V_M i_M}{2} (\cos(2(\omega t - \varphi)) + \cos \varphi)$$

Leçon n°4

Quadripôle linéaire (régime sinusoïdal)

1. Définition Un quadripôle est un élément de circuit à 4 bornes associées à 2 dipôles :

1. Un dipôle générateur de source relié à 2 bornes dites bornes d'entrées.
2. Un dipôle récepteur (Charge relié à 2 bornes dites bornes de sortie.



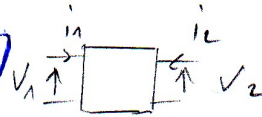
Remarque : Un quadripôle linéaire : $f(V_1, i_1, V_2, i_2) = 0$ avec f linéaire

2. Paramètre d'impédance et représentation d'un dipôle :

2-1- Paramètre d'impédance :

Soit le quadripôle : $F(V_1, V_2) = F(i_1, i_2)$

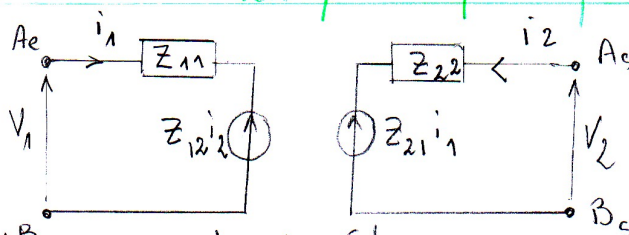
$$F \text{ linéaire : } \begin{cases} V_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 \\ V_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 \end{cases}$$



$V_1, V_2, i_1, i_2, Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}$ et Z_{22} sont complexes.

Z_{ij} sont appelés impédances

2-2- Représentation d'un quadripôle par des schémas équivalents



Le générateur $Z_{12} i_2$ est appelé générateur de tension contrôlée.

3. Définition et mode de mesure des impédances :

* Sortie ouverte (à vide) $i_2 = 0 \Rightarrow Z_{11} = \frac{V_1}{i_1} ; Z_{21} = \frac{V_2}{i_1}$

* entrée ouverte (à vide) $i_1 = 0 \Rightarrow Z_{22} = \frac{V_2}{i_2} ; Z_{12} = \frac{V_1}{i_2}$

4. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire :

Définition : On appelle fonction de transfert (en régime sinusoïdal) entre deux grandeurs électriques d'un quadripôle de même nature, l'une relative à l'entrée et l'autre relative à la sortie.

$$H(j\omega) = \frac{\text{grandeur électrique complexe relative à la sortie}}{\text{grandeur électrique complexe relative à l'entrée}}$$

On a donc $\begin{cases} H(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \\ H(\omega) = |H(j\omega)| \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) \end{cases}$ déphasage entre l'entrée et la sortie

4-1- Exemples de quadripôles en série:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

4-1-1- Quadripôle RC:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$\omega_0 = \frac{1}{RC}$: pulsation de référence

$$H(\omega) = \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

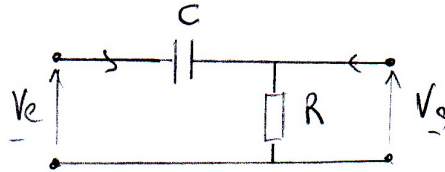
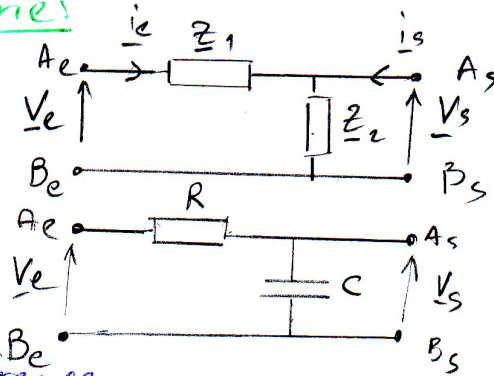
$$\varphi(\omega) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

4-1-2- Quadripôle CR:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



4-2- Le gain décibel:

Définition: Le module de $\underline{H}(j\omega)$ est appelé le gain (en tension, en courant ou en puissance) noté $G(\omega)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{H}(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \\ \text{avec } G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \end{cases}$$

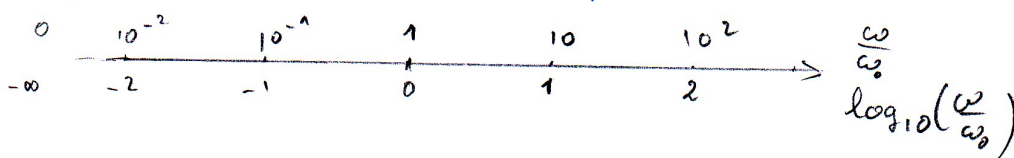
le gain en décibel est défini par: $G(\omega)_{dB} = 20 \log_{10} G(\omega)$

4-3- Diagramme de Bode:

Définition: Le diagramme de Bode consiste à tracer séparément les courbes représentatives de $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} G(\omega) = f(\log_{10}(\omega)) \\ \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = f_r(\log_{10}(\omega)) \\ \underline{H}(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \end{cases}$$

En fait, on représente $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ en fonction de la pulsation réduite $\frac{\omega}{\omega_0}$ repérée en échelle logarithmique



4.4 - Exemple de filtre du 1^{er} ordre:

Définition: On appelle filtre du 1^{er} ordre si la fonction de transfert $H(j\omega)$ est de la forme $H(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega}{b_0 + b_1 j\omega}$ avec $b_1 \neq 0$

4.4.1 Filtre passe bas du 1^{er} ordre:

* a - Commentaires:

→ En basse fréquence (BF) ($\omega \rightarrow 0$)
 $\Rightarrow Z_C \rightarrow \infty \Rightarrow$ Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert (cours-circuit)
 le courant dans R tend vers 0, donc $V_S \rightarrow V_E$.

→ En haute fréquence (HF) ($\omega \rightarrow \infty$) $\Rightarrow Z_C \rightarrow 0$
 $\Rightarrow$ Le condensateur se comporte comme un court circuit
 On a alors $V_S \rightarrow 0$.

* En conséquence: Le quadripôle transmet le signal en basse fréquence, mais le bloque en haute fréquence: c'est le comportement du **filtre passe bas**.

b - Diagramme de Bode:

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

ω_c : pulsation de coupure = $\frac{1}{RC}$

* Bande passante d'un filtre: c'est l'intervalle $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ tq

$$G(\omega_1) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \quad G(\omega_2) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} < G(\omega) < G_{\max} \Rightarrow -3 \text{ dB} < G_{\text{dB}} < G_{\text{dB}_{\max}}$$

c - Filtre passe bas:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \text{Bande passante} = [0, \omega_c]$$

→ En haute fréquence; circuit **Intégrateur**:

$$V_S = \omega_c \frac{V_E}{j\omega} \Rightarrow V_S = \omega_c \int V_E dt$$

4.4.2. Filtre passe haut du 1^{er} ordre:

$$\omega \in [0, +\infty[: \begin{cases} G(0) = 0 \\ G(\infty) = 1 \Rightarrow G_{\max} = 1 \end{cases}$$

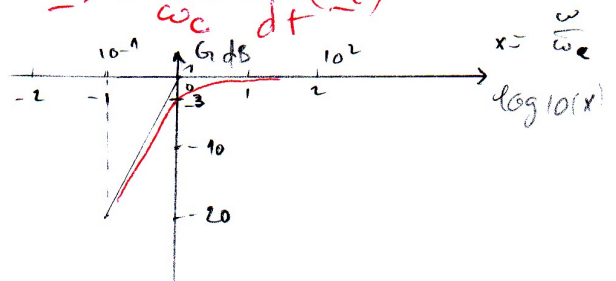
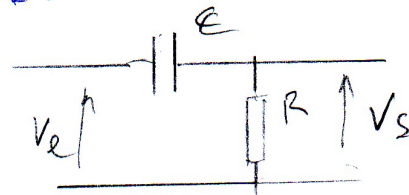
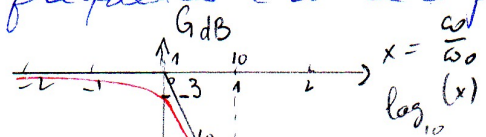
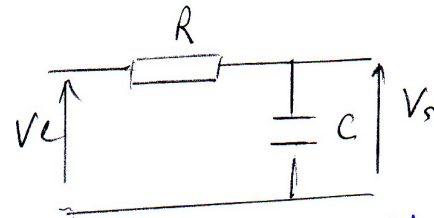
$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \text{Bande passante} = [\omega_c, +\infty[$$

→ En basse fréquence: circuit **dérivateur**

$$V_S = \frac{1}{\omega_c} \frac{d}{dt}(V_E)$$

$$\text{On pose } x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

$$\begin{cases} G_{\text{dB}}(x) = -10 \log_{10} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg } x \end{cases}$$



Optique :

Leçon n°1

Introduction à l'optique géométrique

① Indice de réfraction :

Définition 1 : Milieu homogène transparent et isotrope. MHTI

- homogène = mêmes propriétés en tout pt du milieu.
- isotrope = mêmes propriétés dans toutes les directions.
- transparent = milieu qui laisse passer la lumière sans atténuation

Définition 2 :

Dans les milieux matériels, la lumière se propage à la vitesse $v = \frac{c}{n} \leq c$ avec c = célérité de la lumière

n = indice de réfraction du milieu.

② Loi de Snell-Descartes :

Définition = Dioptré :

Dioptré est une surface de séparation entre deux milieux transparents d'indices de réfraction n_1 et n_2 ($n_1 \neq n_2$).

SI : rayon incident

IR : rayon réfléchi

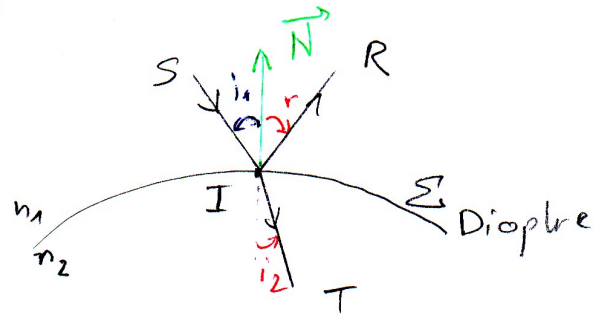
IT : rayon réfracté

$\vec{N}$: normale en I à Σ

i_1 : angle d'incidence

i_2 : angle de réfraction

r = angle de réflexion



Définition : Plan d'incidence : $(I, \vec{SI}, \vec{N})$

C'est le plan passant par I et engendré par $\vec{SI}$ et $\vec{N}$.

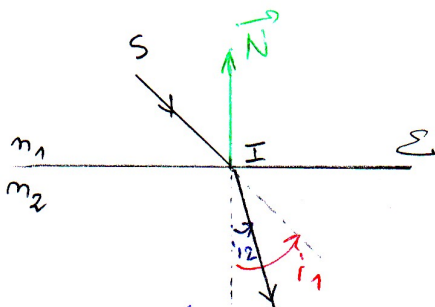
1^{ère} loi : Les rayons réfléchis et réfractés sont dans le même plan d'incidence

2^{ème} loi : Loi de réflexion : $i_1 = -r$ (angle orienté)

3^{ème} loi : Loi de réfraction : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

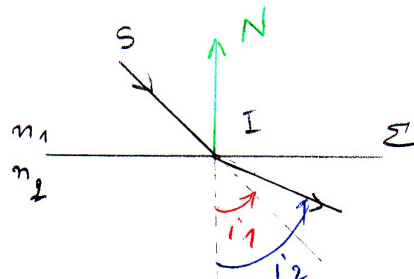
③ La marche d'un rayon réfracté :

Cas 1 : $n_1 < n_2 \Rightarrow i_2 < i_1$



Le rayon réfracté se rapproche de la normale

Cas 2 : $n_1 > n_2 \Rightarrow i_2 > i_1$



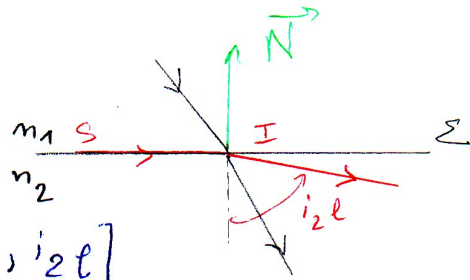
Le rayon réfracté s'éloigne de la normale

④ Angle limite de réfraction - Angle limite d'incidence :

① Angle limite de réfraction: $n_1 < n_2$

$$\sin i_{2l} = \frac{n_1}{n_2} < 1$$

▲ Pour $n_1 < n_2$
 incident ← transmission



- La réfraction existe pour $i_2 \in [-i_{2l}, i_{2l}]$

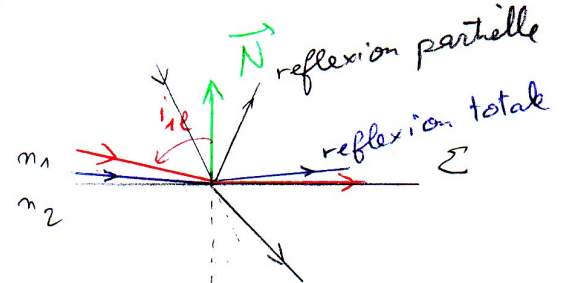
- La réflexion existe pour $\forall i_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

② Angle limite d'incidence: $n_1 > n_2$

$$\sin i_{1l} = \frac{n_2}{n_1} < 1$$

$i_1 < i_{1l} \Rightarrow$ { Il y a réfraction (transmission)
 { Il y a réflexion partielle

$i_1 > i_{1l} \Rightarrow$ { Il y a réflexion totale
 { Il n'y a pas de réfraction



⑤ Construction géométrique d'un rayon réfracté: Méthode de Descartes:

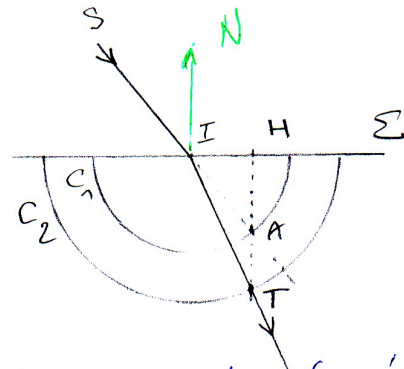
Cas 1: $n_1 < n_2$

1. Tracer les cercles $C_1(I, n_1)$
 et $C_2(I, n_2)$

2. Soit $A = (SI) \cap C_1$

3. Soit $H = \text{Proj}_{\Sigma}(A)$

Soit $T = (HA) \cap C_2$

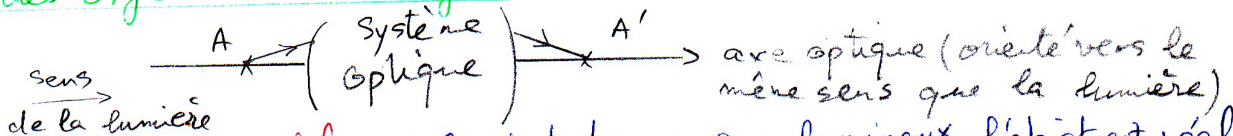


Cas 2: $n_1 > n_2$: même méthode

⑥ Généralité sur les systèmes optiques :

- **Système optique** : Ensemble de milieux transparents séparés par des dioptries
- **Système optique centré** : Système présentant un axe de révolution appelé axe optique

① Nature des objets et des images :



- Définition :**
- **Objet réel** : Si A émet des rayons lumineux, l'objet est réel
 - **Objet virtuel** : A n'émet pas de rayons (situé dans le prolongement des rayons)
 - **Image réelle** : On peut la visualiser sur un écran
 - **Image virtuelle** : ne peut pas être visualisée sur un écran.

② Stigmatisme :

* **Stigmatisme rigoureux** (image nette) : $\forall$ rayon issu de l'objet A, après avoir traversé le système optique, passe par le même point A'. A' est l'image de A. On dit que A et A' sont deux points **conjugués**.

③ Aplanétisme :

c'est la condition pour que deux pts voisins A et B soient un couple rigoureusement stigmatique.

④ Condition de Gauss :

les rayons incidents sont **paraxiaux** (très proches de l'axe optique).
 $\Rightarrow$ condition d'aplanétisme approché + stigmatisme approché

Leçon n°2: Les systèmes optiques à faces parallèles dans les conditions de Gauss

① Miroir plan: Le miroir plan est une surface plane parfaitement réfléchissante.
Rq: Le miroir plan est un exemple qui vérifie la stigmatisation rigoureuse.
 * Relation de conjugaison pour le miroir plan:

$$\overline{SA} = -\overline{SA'}$$

Cas 1: A objet réel
 A' image virtuelle

Cas 2: A objet virtuel
 A' image réelle

② Dioptré plan: C'est une surface plane séparant 2 milieux.

* Cas $n_1 < n_2$ A: objet réel
 A': image virtuelle

* Relation de conjugaison par dioptré plan:

$$\frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2}{\overline{SA'}}$$

* Agrandissement axial ($n_1 < n_2$) pour AC faible

$$\overline{A'C'} = \frac{n_2}{n_1} \overline{AC}$$

$$\gamma_a = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{n_2}{n_1} \text{ agrandissement axial}$$

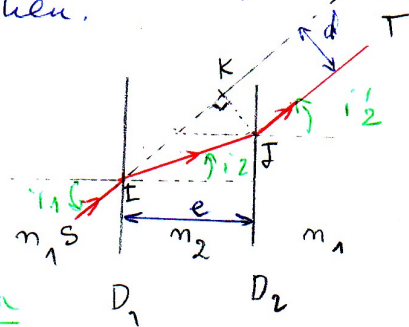
$$\overline{AA'} = \overline{AS} \left(1 - \frac{n_2}{n_1} \right)$$

③ Lame à faces parallèles: C'est un système optique formé par un milieu limité par 2 plans, plongé dans un autre milieu.

① Marche d'un rayon:

$$i_1 = i_2$$

$$d = JK = \frac{e \sin(i_1 - i_2)}{\cos i_2}$$



② Construction de l'image d'un objet sur l'axe optique: $n_1 < n_2$

A $\xrightarrow{D_1}$ A₁ $\xrightarrow{D_2}$ A'
 objet réel image virtuelle de A par D₁ image de A virtuelle par $\Sigma = D_1 D_2$

$$\overline{AA'} = \overline{S_1 S_2} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right)$$

④ Association d'un miroir plan et d'un dioptré plan:

$$\frac{\overline{S_1 A} + \overline{S_1 A'}}{2} = \frac{e}{n}$$

Ce système est assimilable à un miroir plan à l'axe optique passant par S₀ tq $\overline{S_0 A'} = -\overline{S_0 A}$
 $\overline{S_0 S_1} = \frac{e}{n}$



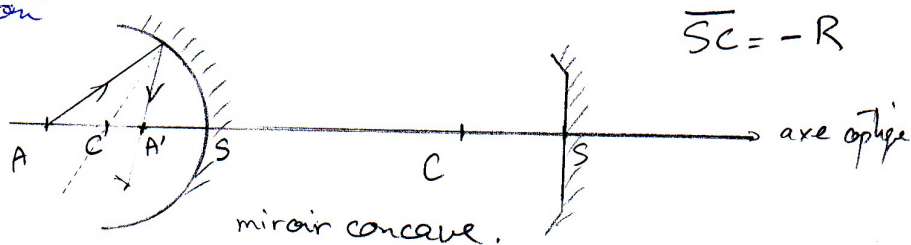
Leçon n°3: Miroir sphérique dans l'approximation de Gauss

① Définition:

1. Miroir sphérique:

C'est une calotte sphérique réfléchissante de centre C de sommet S et de rayon R on

C = centre de la sphère
S = sommet de la sphère
R = rayon de la sphère



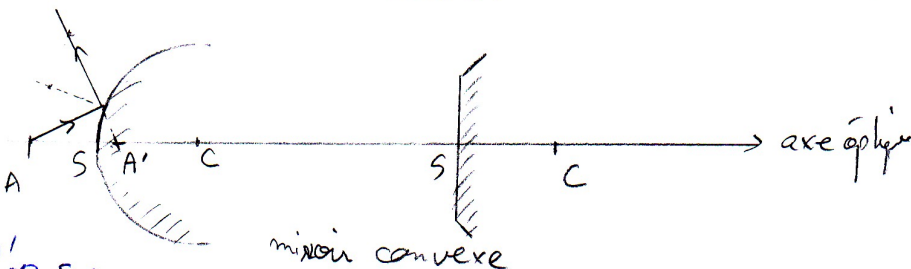
2. Foyer principal objet Foyer principal image:

Foyer principal objet:

F_{miroir} image de F = point situé à l'∞ sur l'axe optique

Foyer principal image:

F' c'est l'image d'un pt A situé à l'∞ sur l'axe optique.



3. Plan focal objet - Plan focal image:

Plan focal objet: C'est le plan passant par F et ⊥ à l'axe optique.

Plan focal image: C'est le plan passant par F' et ⊥ à l'axe optique

② Relations de conjugaison (Miroir sphérique):

1. Formule de conjugaison avec origine au centre:

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

$$\gamma_L = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

Pour un miroir sphérique, $F = F'$ avec $\overline{CF} = \frac{R}{2}$ et $\overline{CF'} = \frac{\overline{CS}}{2}$

2. Formule de conjugaison avec origine au sommet:

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{\overline{SF}}$$

$$\gamma_L = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{A'S}}{\overline{AS}}$$

$$\text{avec } \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

3. Formule de conjugaison avec origine au foyer:

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{SF}^2 = f^2$$

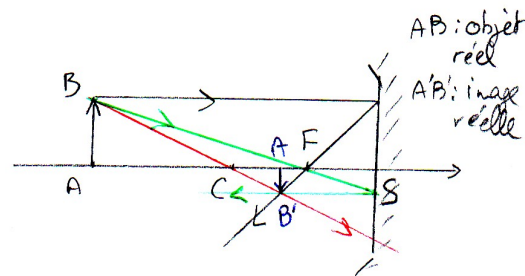
$$\gamma_L = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

avec $f = \frac{R}{2}$ distance focale

③ Construction géométrique:

1. Image (A'B') d'un objet (AB) ⊥ à l'axe optique:

1. Un rayon passant par B et // axe optique traverse le miroir sphérique en passant par F'
2. Le rayon (BF) traverse le miroir et sort // à l'axe optique
3. Le rayon (BC) de vérification traverse le miroir et sort sans être dévié.

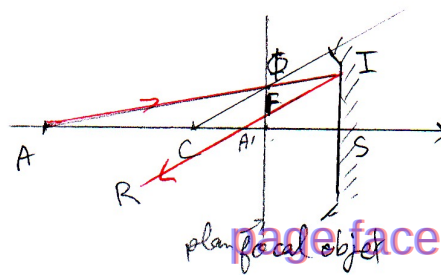


2. Image d'un rayon:

Méthode du foyer secondaire objet:

1. On trace le plan focal objet
2. $\Phi = (AI) \cap P_{\text{focal objet}}$
3. Tracer (CΦ)
4. Tracer (IR) // (CΦ)

5. $A' = (IR) \cap \text{axe optique}$



Leçon 4 : Les lentilles minces dans l'approximation de Gauss

① Définition: Les lentilles minces:

Une lentille mince est une association de deux dioptries sphériques centrés sur le même axe.

② Relation de conjugaison avec origine au centre:

$$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{-1}{\overline{OF}} = \frac{+1}{\overline{OF'}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{\overline{OF}} = (n-1) \left(\frac{1}{\overline{OC}_1} - \frac{1}{\overline{OC}_2} \right)$$

Distance focale d'une lentille:

$f = \overline{OF}$: distance focale objet

$f' = \overline{OF'}$: distance focale image

$$f = -f'$$

Vergence:

$$V = \frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Agrandissement transversal:

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

③ Formule de conjugaison avec origine au Foyer: Formule de Newton:

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 = -f^2$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{FO}}$$

④ Construction géométrique:

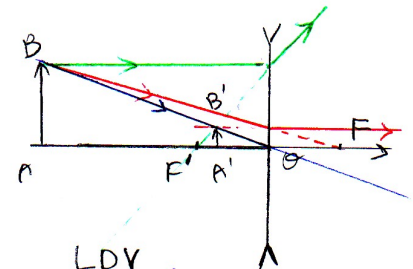
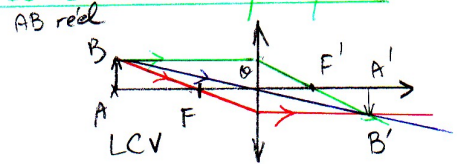
① Construction de l'image d'un objet $AB \perp$ à l'axe optique:

Méthode de construction: rayons nécessaires:

1. Le rayon passant par B et // à l'axe optique sort par la lentille en passant par F' .
2. Le rayon BF sort de la lentille // à l'axe optique.

$B' = \cap$ des deux rayons.

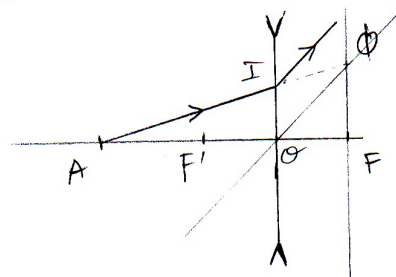
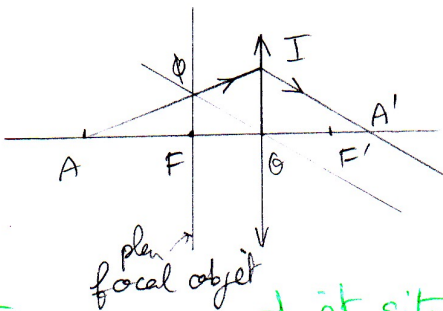
3. rayon de vérification: (BO) sort de la lentille sans être dévié.



② Construction de l'image d'un pt A sur l'axe optique - La conjugaison d'un rayon quelconque:

Cas 1: Lentille convergente

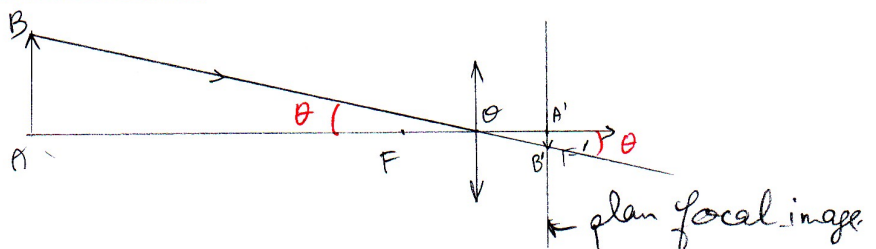
Cas 2: Lentille divergente



③ Image ou objet situé à l' ∞ :

Cas 1: Objet situé à l' ∞

$$\overline{A'B'} = -f'\theta$$



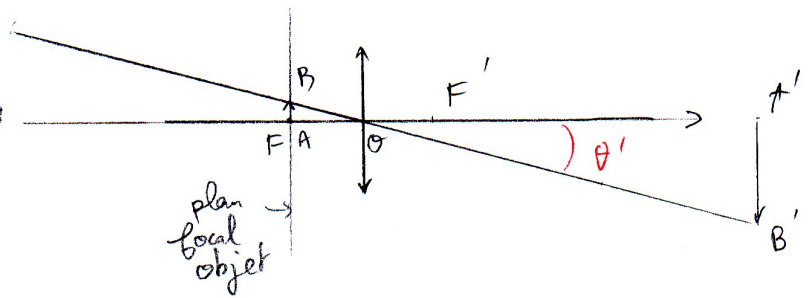
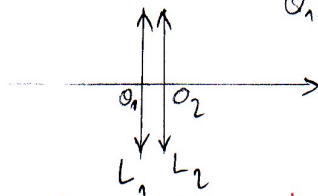
Cas 2 : Image à l'infini :

$$\overline{AB} = f' \theta$$

⑤ Association de lentilles minces :

① Lentilles accolées :

$$O_1 \approx O_2 \approx O$$



Formule de conjugaison pour $L_1 L_2$ avec origine au centre :

$$\frac{1}{O.A} - \frac{1}{O.A'} = -\left(\frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}\right)$$

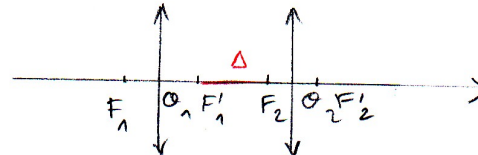
$$\gamma_t = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

On obtient les relations de conjugaison d'une lentille mince unique de centre O et de distance focale image telle que $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$.

② Doublet non accolées :

On appelle intervalle optique Δ la valeur algébrique

$$\Delta = F'_1 F_2$$

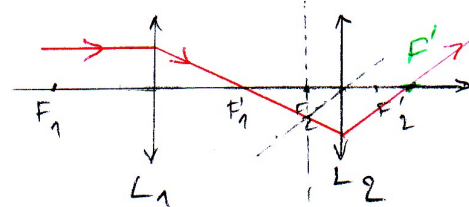


1. Détermination du foyer image F' d'un doublet $L_1 L_2$

Méthode graphique : le point F' est le pt conjugué d'un rayon incident parallèle à l'axe optique.

Méthode Analytique :

$$\boxed{F'_2 F' = \frac{f'^2_2}{\Delta}}$$

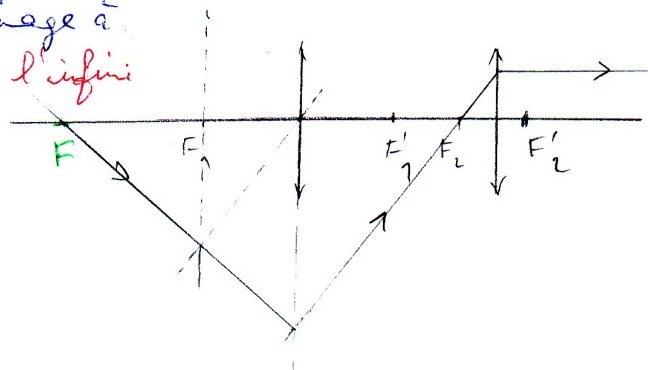


2. Détermination du foyer objet F d'un doublet

Méthode graphique : le point F est situé sur l'axe optique dont l'image à travers le doublet est située à l'infini.

Méthode analytique :

$$\boxed{F_1 F = -\frac{f'^2_1}{\Delta}}$$



Leçon 1: Introduction à la thermodynamique

- Variables intensives: Elles sont les variables globales relatives au système entier et sont additives ($m, V, n, \dots$)
- Variables extensives: Ce sont des variables locales, c'est-à-dire leurs valeurs dépendent du pt M où on veut la mesurer. ($T, P, \dots$)
- Équation d'état d'un système physique: C'est une relation entre les variables d'état du système. (Exemple pour un gaz parfait:
$$f(P, V, T) = PV - nRT$$
$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$$
- Fonction d'état: Toute grandeur physique G s'exprimant en fonction des variables d'état est appelée fonction d'état.
- Équilibre thermodynamique: Un système est en état d'équilibre thermodynamique lorsque toutes les variables d'état demeurent constantes en tout point du système (uniforme).

$$E_{CIR} = E_{C_{macro}} + E_C^*$$

$$E_{C_{macro}} = \frac{1}{2} M \vec{V}_G^2$$

= énergie cinétique macroscopique de l'ensemble

$$E_C^* = \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^{*2} : \text{énergie cinétique d'agitation dans } R^*$$

$$U = E_C^* + E_p^{int}$$

énergie interne du système (S)

1 - Modèle cinétique du gaz parfait:

Un gaz parfait vérifie les hypothèses suivantes:

H₁/ On assimile les molécules du gaz à des points matériels

H₂/ En dehors des chocs, les particules sont libres, il n'y a pas d'interactions entre les molécules ($E_{p, int} = 0$)

H₃/ Le chaos moléculaire: la matière est équirépartie dans le récipient contenant le gaz.

H₄/ Isotropie de l'espace; aucune direction n'est privilégiée;
 $\sum \vec{v}_i = \vec{0}$; isotropie des vitesses.

H₅/ Les chocs intermoléculaires et les chocs molécules paroi sont parfaitement élastiques.

$$P = \frac{1}{3} n^* m \overline{V^2}$$

↑
pression macroscopique

↑
 $\frac{N}{V}$: densité de particule

↑
masse de la molécule

$$\overline{V^2} = \frac{1}{n} \sum \vec{v}_i^2$$

noté $\langle V^2 \rangle$ est la vitesse quadratique moyenne des particules.

$$P = \frac{1}{3} P_c = \frac{1}{3} n^* m \overline{V^2}$$

(pour un gaz parfait)

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{c,i}$$

↑
pression cinétique.

énergie cinétique moyenne.

$$P = \frac{2}{3} n^* \langle E_c \rangle$$

$$PV = \frac{2}{3} N \langle E_c \rangle$$

$$V = \sqrt{\frac{3K_B T}{m}}$$

vitesse quadratique

$$\langle E_c \rangle = \frac{d}{2} K_B T$$

nbre de
degrés de liberté.

Equation d'état pour le gaz parfait: $PV = nRT$

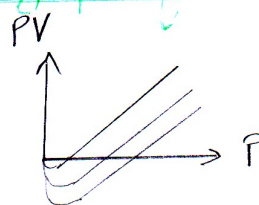
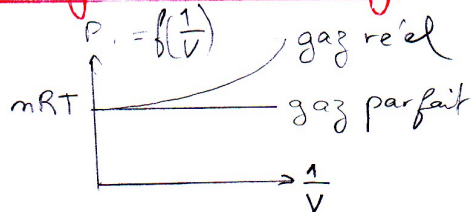
3 - Energie interne d'un gaz parfait:

1 - Gaz monoatomique: $U = \frac{3}{2} nRT$

2 - Gaz diatomique: $U = \frac{5}{2} nRT$

4 - Gaz réel et limite du modèle gaz parfait:

1 - Diagramme d'Amagat: $PV = f(P)$:



(2) Insuffisance du modèle gaz parfait

V_m : volume molaire minimal

$$V_m = \frac{V}{n}$$

b : covolume $b = \lim_{P \rightarrow \infty} V_m$

P_m : pression moléculaire $P \rightarrow \infty$

$$P_m = -\frac{a}{V_m}$$

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \quad \text{équation de Van der Waals}$$

$$[a] = \text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$$

$$[b] = \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$



exosup.com

Pression macroscopique dans un fluide au repos: statique des fluides

Définition d'un fluide: C'est un milieu matériel continu à l'échelle macroscopique et qui est libre de se mouvoir.

Fluide parfait: Tous les efforts à l'intérieur du fluide sont normaux.

Fluide visqueux: les efforts sont normaux et tangentiels.

Fluide compressible: ρ = densité du fluide n'est pas constante.

Fluide incompressible: on ne peut pas diminuer son volume.

Pression dans un fluide au repos.

$$d\vec{F}(M) = -P(M) d\vec{S}(M)$$

↑ champ de pression - pression statique au pt M.

R/ $P(M) > 0$ si les interactions de contact entre le fluide extérieur et (S) sont répulsives.

$P(M) < 0$ si les interactions sont attractives dans des cas particuliers

Equation fondamentale de la statique des fluides:

$$-\text{grad} P + \vec{f}_v = \vec{0}$$

↑ densité volumique de forces

$\vec{f}_v = \frac{d\vec{F}_v}{dv}$ ← force élémentaire de volume

$\frac{d\vec{F}_v}{dv}$ ← volume élémentaire

Equation d'équilibre d'un fluide dans un champ de pesanteur

$$-\text{grad} P + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (\text{fluide homogène})$$

Théorème de Pascal: (pour fluide incompressible) $P_B - P_A = \rho g (z_A - z_B)$ (fluide incompressible)

$$P_{B'} = P_B + \Delta P$$

⇒ Un fluide incompressible transmet les variations de pression.

Théorème d'Archimède:

$$\vec{F}_s = -\vec{P}_{\text{fluide}}$$

$\vec{F}_s$: poussée d'Archimède appliquée au centre de gravité du fluide déplacé.

Énoncé du théorème:

Tout solide immergé dans un fluide quelconque au repos est soumis à des forces de pression appelées poussée d'Archimède opposées au poids du fluide déplacé.

Condition d'équilibre: $\|\vec{P}_{\text{poussé}}\| = \|\vec{P}\|$

{ G et C sur la même verticale.

G: centre de masse du solide

C: centre de masse du fluide limité par (S): frontière.

- * Equilibre indifférent: $C = G$
- * Equilibre stable: $G < C$
- * Equilibre instable: $G > C$
- * $\|\vec{Poussé}\| > \|\vec{P}\| \Rightarrow$ ascension
- * $\|\vec{Poussé}\| < \|\vec{P}\| \Rightarrow$ chute vers le bas

Equilibre dans l'atmosphère:

$$P(z) = P(0) e^{-\frac{Mg}{RT} z}$$

Leçon n°4

Transformation d'un système thermodynamique
coefficient thermoélastique

1- Transformation d'un système thermodynamique

Définition: Une transformation est un processus thermodynamique qui permet de faire évoluer un système d'un état d'équilibre initial vers un autre état d'équilibre final tout en respectant les lois de la thermodynamique.

- * Transformation brutale: courte
- * Transformation quasistatique = lente

2- Transformation réversible: la transformation inverse se produit en passant par tous les états d'équilibre intermédiaires de la transformation $I \rightarrow F$.

⚠ Dans chaque état d'équilibre intermédiaire, les variables d'état sont définies.

3- Transformation irréversible: si on ne connaît pas les états d'équilibre intermédiaires. La transformation inverse est impossible.

4- Coefficient thermoélastique:

* Pour une transformation isobare: P cste le long de la transf°

- coefficient de dilatation:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P$$

* Pour une transf° isotherme:

- coefficient de compressibilité:

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T$$

* Pour une transf° isochore:

- coefficient de compressibilité isochore

$$\beta = \frac{1}{P} \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V$$

✓ Transf° isobare = pression constante le long de la transf°

• Transf° monobare = pression initiale = pression finale mais P varie au cours de la transf°.

Leçon 5

1^{er} principe de la thermodynamique

1^{er} principe de la thermodynamique

L'énergie interne d'un système thermodynamique est une fonction des variables d'état du système thermodynamique $\Rightarrow U$ est une fonction d'état.

Corollaire :

ΔU ne dépend pas du chemin suivi par la transformation.

Commentaires :

c₁ / dU est une différentielle totale car U est une fonction d'état.

c₂ / pour un cycle $I \equiv F$, $\Delta U = 0$

c₃ / U est une grandeur extensive : $S = A \cup B \Rightarrow U_S = U_A + U_B$.

Définition du travail d'un pt de vue de la thermodynamique :

$$W = W(\vec{F}^{\text{ext}} \rightarrow S)$$

- $W > 0$: travail reçu par le système thermodynamique et il est fourni par l'extérieur

- $W < 0$: travail fourni par le système thermodynamique et cédé à l'extérieur

Travail échangé lors d'une transformation :

① Transformation quasistatique (lente) :

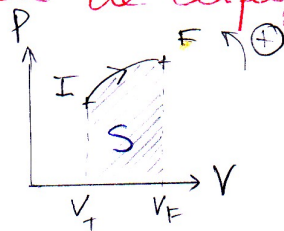
$$\delta W = -P dV \rightarrow \text{transf}^{\circ} \text{ quasistatique}$$

$\rightarrow \text{transf}^{\circ} \text{ réversible}$

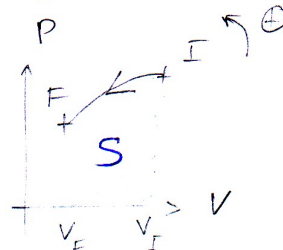
$$\delta W > 0 \Rightarrow dV < 0 \Rightarrow \text{compression du fluide}$$

$$\delta W < 0 \Rightarrow dV > 0 \Rightarrow \text{dilatation (délente)}$$

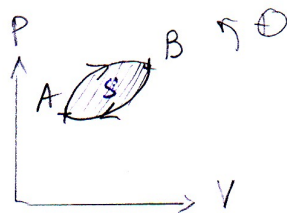
Diagramme de Clapeyron :



$$W = -S < 0 \Rightarrow \text{dilatation}$$

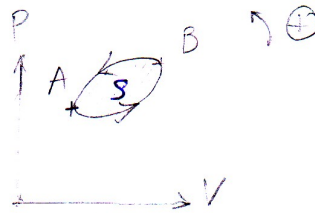


$$W = S > 0 \Rightarrow \text{compression}$$



$$W = -S < 0$$

cycle **moteur**
(sens indirect)



$$W = S > 0$$

cycle **récepteur**
(sens direct)

② Transformation irréversible :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P_{\text{extérieur}} dV$$

avec P_{ext} : pression
extérieure exercée sur
la frontière du système.

Transfert thermique échangé lors d'une transformation:

$$Q = W_{mc}(\vec{F}_{micro}^{ext}) \neq 0$$

$$[Q] = \text{Joule}$$

↳ transfert thermique

Equation de conservation de l'énergie:

2^{ème} version du 1^{er} principe:

$$\Delta(U + E_{cmacro} + E_p^{ext}) = W + Q$$

$$\text{Système au repos: } E_{cmacro} = 0 \quad \text{↳ } W_{mc}(\sum \vec{F}_{macro}^{ext})$$

$$\text{On suppose que } \Delta E_p^{ext} = 0$$

$$\Delta U = W + Q$$

Commentaire:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

• Pour une transformation cyclique, $\Delta U = 0 \Rightarrow W = -Q$

• Si le système reçoit du travail ($W > 0$) $\Rightarrow Q < 0$

→ le système fournit de la chaleur au milieu extérieur.

L'enthalpie:

* Transformation isochore $\Rightarrow \Delta U = Q_V$

* Transformation isobare $\Rightarrow \Delta H = Q_P$

Rq: transf = monochore $\Rightarrow \Delta H = Q_P$

* Transformation adiabatique $\Rightarrow Q = 0$

$$H = U + PV$$

Capacité thermique à volume (cte): $C_V = \left. \frac{\partial U(T, V)}{\partial T} \right|_V$ $[C_V] = J \cdot K^{-1}$

* Capacité thermique molaire à V cte

$$C_{V,m} = \frac{C_V}{n}$$

* Capacité thermique massique à V cte

$$c_v = \frac{C_V}{m}$$

* pour un gaz parfait: $\Delta U = \int_{T_I}^{T_F} C_V(T) dT$

Capacité thermique à pression cte:

$$C_P = \left. \frac{\partial H(T, P)}{\partial T} \right|_P$$

* Capacité thermique molaire: $C_{P,m} = \frac{C_P}{n}$

* Capacité thermique massique: $c_p = \frac{C_P}{m}$

* Pour un gaz parfait: $\Delta H = \int_{T_I}^{T_F} C_P(T) dT$

Relation de Mayer:

$C_P - C_V = nR$	$\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$
$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$	$C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$

Transformation adiabatique réversible:

Pour un gaz parfait:
Loi de Laplace

$$\boxed{PV^\gamma = \text{cste}} \quad \text{le long de la transf. adiabatique réversible}$$
$$TV^{\gamma-1} = \text{cste} \rightarrow \text{isobare}$$
$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cste} \rightarrow \text{isochore}$$

Calorimétrie: ne laisse pas passer la chaleur. ($Q=0$)

Leçon 6: Le 2nd Principe.

Énoncé:

∀ le système thermodynamique, il existe une fonction d'état qu'on appelle entropie S qui possède la propriété suivante:

Aucours d'une transformation infinitésimale (élémentaire), le système thermodynamique (Σ) échange avec l'extérieur Σ_{ext} une quantité de chaleur δQ et la variation d'entropie du système thermodynamique Σ est donnée par: $dS = dS_e + \delta S_c$ avec $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T}$ entropie échangée avec l'extérieur.

T : température T de la frontière entre Σ et Σ_{ext} .

• $\delta S_c \geq 0$ entropie créée à l'intérieur du sys.

• $\delta S_c = 0$ pour une transformation réversible.

Corollaire:

C₁/ $\boxed{dS \geq \frac{\delta Q}{T}}$

∀ la transformation

∀ le processus thermodynamique

C₂/ Transf. adiabatique: $\delta Q = 0$ alors $dS = \delta S_c \geq 0$

si la transf. est réversible } $\Rightarrow S = \text{cste}$ transformation isentropique

adiabatique

C₃/ Pour un système isolé: $\delta Q = 0 \Rightarrow dS_e = 0$

C₄/ $dS = dS_e + \delta S_c$

$$\Delta S = \Delta S_e + S_c$$

$$[S] = \text{J K}^{-1}$$

Définition: Thermostat: source de chaleur: un corps dont la température reste toujours constante: $T = T_0 = \text{cste}$, capable d'échanger de la chaleur avec tout système thermodynamique sans changer sa température.

★ Si le système est en contact avec N sources de chaleur, alors:

$$\Delta S \geq \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i}$$

* Température thermodynamique T_{th} : $\frac{1}{T_{th}} = \left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_V$

* Pression thermodynamique P_{th} : $\frac{P_{th}}{T_{th}} = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_U$

or $P_{th} = P_{macro} = P$

$\Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV$ identité thermodynamique,

$dU = T dS - P dV$

$dH = T dS + V dP$

Entropie des gaz parfaits:

$en(T, V)$	$dS = nR \left[\frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right]$
$en(T, P)$	$dS = nR \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right]$
$en(P, V)$	$dS = nR \left[\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} \right]$

Transformation isentropique $\Leftrightarrow$ réversible + adiabatique

Définition:

Une machine thermique est un système permettant de transformer du travail en chaleur et inversement.

Une machine thermique est composée par:

- Un système thermodynamique (ex gaz...)
- Un système mécanique (ex compresseur...)
- Une ou plusieurs sources de chaleur.

Moteur:

Le sys. therm. reçoit de la chaleur ($Q > 0$) et fournit du travail ($W < 0$)

Dans ce cas:

La dépense = Q

Le gain = $|W|$

$$r = \text{Le rendement} = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} = \frac{|W|}{Q} < 1$$

Réfrigérateur - Climatiseur

Le sys therm reçoit du travail ($W > 0$) qui permettra de transférer de la chaleur de l'intérieur du réfrigérateur (source froide) $Q_F > 0$ vers l'extérieur (source chaude) $Q_C < 0$

Dans ce cas: La dépense = W

Le gain = Q_F (le but est de refroidir la source froide)

$$e = \text{la performance} = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} = \frac{Q_F}{W}$$

Pompe à chaleur:

Le sys therm reçoit du travail ($W > 0$) qui permettra le transfert de la chaleur de l'extérieur de la pièce (source froide) $Q_F > 0$ vers l'intérieur de la pièce (source chaude) $Q_C < 0$

Dans ce cas: La dépense = W

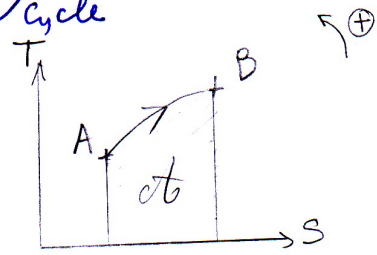
Le gain = $|Q_C|$

$$e = \text{la performance (l'efficacité)} = \frac{|Q_C|}{W} = -\frac{Q_C}{W}$$

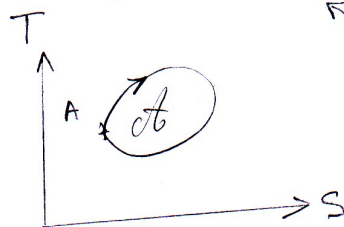
* Cycle polytherme: sys. therm + 1 ou plusieurs sources de chaleur.

Diagramme entropie (T, S)

$$Q = \int_{\text{cycle}} T ds$$



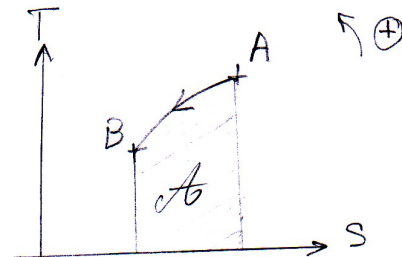
$$Q = A$$



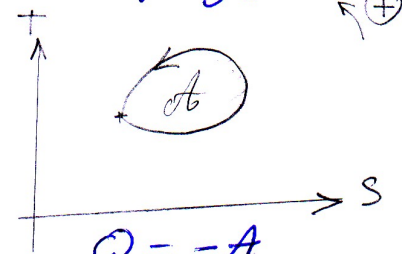
$$Q = A$$

$$W = -Q < 0$$

cycle moteur



$$Q = -A$$



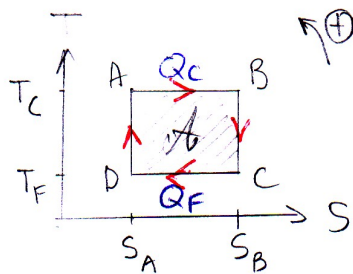
$$Q = -A$$

$$W = -Q > 0$$

cycle récepteur

Inégalité de Clausius:

① Cycle de Carnot: Cycle composé de 2 isothermes et 2 isentropiques
C'est un cycle ditherme



c'est un cycle moteur

$$Q = (S_B - S_A)(T_C - T_F) > 0$$

$$\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} \leq 0$$

Relation de Clausius
pour deux sources

$$r = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

cycle réversible de
Carnot

② Inégalité de Clausius:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q_i}{T_i} \leq 0$$

$$\langle P_{\text{thermique}} \rangle = \int_0^{\Delta t} \frac{Q(t)}{\Delta t} dt$$

$$= \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \int_{\text{cyc}} \frac{\delta Q_F}{T_F} + \int_{\text{cyc}} \frac{\delta Q_C}{T_C} \leq 0$$

$$\boxed{\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} \leq 0}$$

relation de Clausius pour 2 sources

Si le système est réversible $\Rightarrow \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$

D'après le 1^{er} principe $\Delta U = W + Q$
cycle $\Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow W + Q = 0$ d'où $W = -Q$

$$\Rightarrow W = (T_F - T_C)(S_B - S_A) < 0 \quad \text{cycle moteur d'itherne}$$

Donc le rendement du cycle =

$$r = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} = \frac{|W|}{Q_C} = \frac{(T_C - T_F)(S_B - S_A)}{T_C(S_B - S_A)}$$

$$\boxed{r = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

cycle réversible de Carnot

4-2. Inégalité de Clausius:

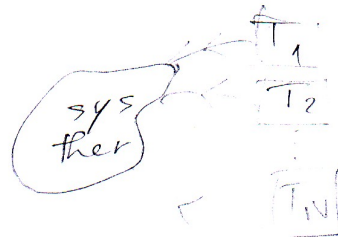
N sources $T_1, \dots, T_N$

On a démontré:

$$dS = \sum_{i=1}^N \frac{\delta Q_i}{T_i} + \delta S_c$$

$$dS \geq \sum_{i=1}^N \frac{\delta Q_i}{T_i}$$

$$\int_{\text{cycle}} dS \geq \sum_{i=1}^N \int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q_i}{T_i}$$



$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^N \int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q_i}{T_i} \leq 0} \quad \text{inégalité de Clausius}$$

4-3. Diagramme de Paveau: Cycle irréversible d'itherne

2 sources T_F, T_C

W, Q_F, Q_C algébriques

On se place dans le cas d'un syst.

thermodynamique fermé au repos,

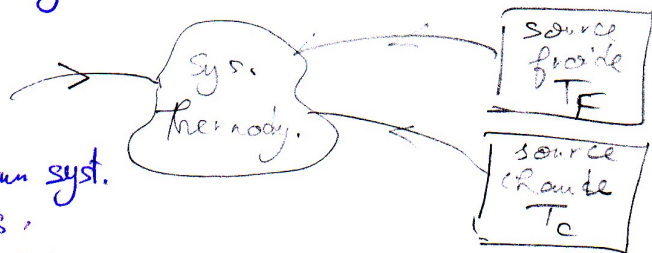
1^{er} principe: $\Delta U = 0$ (cycle) $\Rightarrow W + Q_F + Q_C = 0$

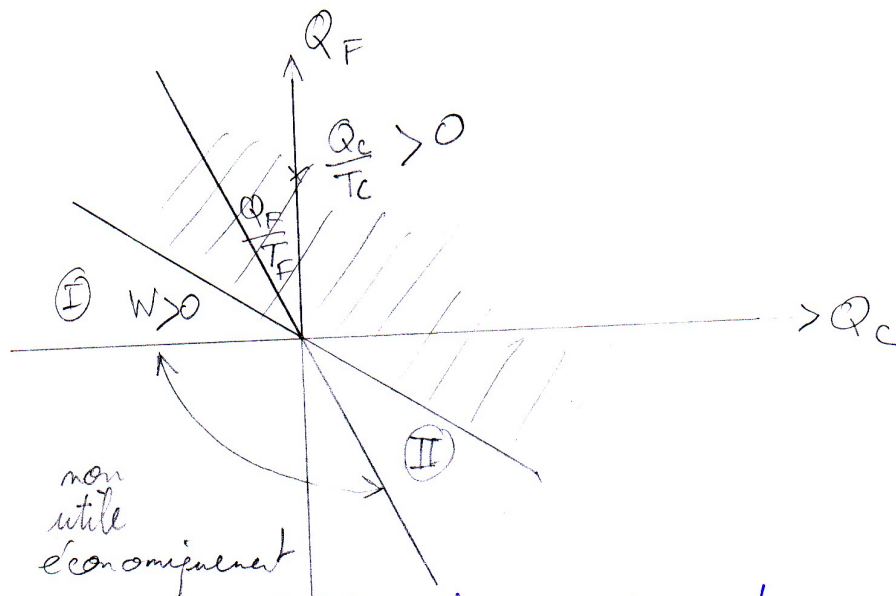
2^{ème} principe: $\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} \leq 0$

Dans le plan (Q_C, Q_F) on trace deux droites d'équations

$$\Delta_1: Q_F + Q_C = 0$$

$$\Delta_2: \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$$





Les zones I et II sont valables économiquement.

I Domaine des récepteurs thermiques ayant un intérêt économique.

II Domaine des moteurs thermiques

D'après le 1^{er} principe $\Delta U = W + Q = 0$ (cycle)

$$\Rightarrow W = -Q$$

$$= -(T_F - T_C)(S_B - S_A) < 0$$

Le cycle moteur diatherme.

Le réfrigérateur, le climatiseur, la pompe à chaleur sont situés dans la région I.

Les moteurs sont situés dans la région II.

$$r = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} = \frac{|W|}{Q_C} = -\frac{W}{Q_C} = \frac{(Q_F + Q_C)}{Q_C}$$

$$r = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$$

D'après l'inégalité de Clausius

$$\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} \leq 0 \Rightarrow \frac{Q_F}{T_F} \leq -\frac{Q_C}{T_C}$$

$$Q_C > 0 \Rightarrow \frac{Q_F}{Q_C} \leq -\frac{T_F}{T_C} \text{ d'où } r \leq 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

$$\Rightarrow r \leq r_{\text{rév}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

rendement d'un cycle réel moteur

cycle réversible Carnot.

5. Machine frigorifique :

Elle reçoit du travail ($W > 0$) et de la chaleur de la source froide ($Q_F > 0$) $\Rightarrow$ fournit Q_C ($Q_C < 0$) source chaude.

l'efficacité : $e = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} = \frac{Q_F}{W}$

$$e = \frac{Q_F}{Q_F + Q_C}$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{-1}{1 + \frac{Q_C}{Q_F}}$$

inégalité de Clausius $\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{Q_F}{T_F} \leq -\frac{Q_C}{T_C}$$

$$Q_F > 0 \Rightarrow \frac{T_C}{T_F} \leq -\frac{Q_C}{Q_F}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_C}{Q_F} \leq -\frac{T_C}{T_F}$$

$$1 + \frac{Q_C}{Q_F} \leq 1 - \frac{T_C}{T_F}$$

$$\Rightarrow e \leq \frac{-1}{1 - \frac{T_C}{T_F}} = \frac{T_F}{T_F - T_C} = \frac{1}{\frac{T_C}{T_F} - 1}$$

6. Pompe à chaleur :

$$e = \frac{-Q_C}{W}$$

$$\Rightarrow e \leq \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

Rq la pompe à chaleur : Elle reçoit du travail ($W > 0$) et de la chaleur de la source froide ($Q_F > 0$) $\Rightarrow$ fournit $Q_C < 0$.